博士学位論文

内容の要旨及び審査の結果の要旨

第23号

2006年9月

京都産業大学

はしがき

本号は，学位規則（昭和28年4月1日文部省令第9号）第8条の規定による公表を目的とし，平成18年9月23日に本学において博士の学位を授与した者の論文内容の要旨及び論文審査の結果の要旨を収録したものである。

学位記番号に付した乙は，学位規則第4条第2項によるもの（いわゆる論文博士）である。

目　次

論文博士

氏　名（本　籍）	門田　智則　（兵庫）
博　士（専攻分野）	博士（数学）
学　位　記　番　号	乙理第９号
学位授与年月日	平成 18 年 9 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第４条第２項該当
論　文　題　目	On analytic properties of L-functions attached to cusp forms on the unitary group of degree two
論文審査委員	主　査　村瀬　篤　教授
	副　査　伊藤　正美　教授
	〃　　正岡　弘照　教授

論文内容の要旨

調査論文の主要結果は、次数 2 のユニタリ群 $U(1,1)$ 上の正則尖点形式に付随する保型 L 関数の解析的性質、特に解析接続および関数等式である。また、証明の過程で、$U(1,1)$ 上の局所的 Whittaker 関数の存在、一意性および明示公式が得られている。以下に、次の順序で詳細を述べる。

1.1 研究の背景と位置付け

1.2 各章の内容

1.1 研究の背景と位置付け

上半平面 $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 上の正則関数 f で、任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ に対し $f((az+b)(cz+d)^{-1}) = (cz+d)^k f(z)$ を満たし、

フーリエ展開 $f(z)=\sum_{m\in\mathbf{Z}} c_f(m)\exp(2\pi imz)$ において $c_f(m)=0\ \ (m\le 0)$ となるものを $SL_2(\mathbf{Z})$ 上の weight k の正則尖点形式という。

1920年代にHeckeは、正則尖点形式 f に対し、Hecke の L 関数とよばれる Dirichlet 級数

$$L_{Hecke}(f;s)=\sum_{m=1}^{\infty} c_f(m)m^{-s}$$

を導入し、$L_{Hecke}(f;s)$ が全 s 平面上の有理型関数として解析接続され、さらに $s\mapsto k-s$ に関し関数等式を持つことを示した。Hecke の L-関数は、保型形式に付随する保型 L 関数の最も単純な場合である。その後、保型 L 関数の理論は、様々な代数群上の保型形式の場合に一般化され、整数論の最も重要な研究主題の1つとなっている。

1940年頃、Rankin と Selberg は独立に、2つの $SL_2(\mathbf{Z})$ 上の weight k の正則尖点形式 f,g に対し、Dirichlet 級数

$$L(f,g;s)=\sum_{m=1}^{\infty} c_f(m)\overline{c_g(m)}m^{-s}$$

を考察し、$f,\overline{g}$ および Eisenstein 級数の積の $SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H}$ 上の積分 (Rankin-Selberg 積分) との関係を調べることにより、$L(f,g;s)$ の解析接続と関数等式を示した。この形の積分を用いる方法を Rankin-Selberg 法と呼び、保型 L 関数の理論において強力な研究手法となっている。

Rankin-Selberg の結果を一般化する試みは数多く行なわれてきたが、f が $SL_2(\mathbf{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(N)=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})\mid N|c\}$ 上の正則尖点形式で、g がテータ級数の場合は特に興味深く、Shimura, Gross-Zagier, Gross 等による重要な結果がある。

調査論文においては、g が虚2次体 K のノルム形式から定まる球関数付きのテータ級数の場合に考察している。このとき、対応する L 関数の本質的部分は

$$\sum_{\mathfrak{a}} c(\mathrm{N}\mathfrak{a})\xi(\mathfrak{a})\,\mathrm{N}\mathfrak{a}^{-s}$$

である。ここに、$\mathfrak{a}$ は K の整イデアルを渡り、$\mathrm{N}\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}$ のノルム、ξ は K の

量指標である。ただし、ある整数 w に対し、$\xi((\alpha)) = \alpha^w \ (\alpha \in K^\times)$ となるものとする。この整数 w を ξ の weight という。Gross-Zagier が考察したのは、ξ の weight が 0 の場合 (すなわち、ξ が「類指標」の場合) であった。また、彼らは K の判別式が奇数の場合に限定して、$p=2$ における困難を回避している。f を $U(1,1)$ 上の保型形式とみると、考察対象の L 関数は標準 L 関数と呼ばれるものの一種である。調査論文では、この L 関数について、その解析接続と関数等式をアデール的な Rankin-Selberg 法を用いて研究し、f のフーリエ係数に関するある条件の下で完全な結果を得ている。また、証明の過程で、$U(1,1)$ 上の局所的 Whittaker 関数についての新しい結果も得ている。

最近の Murase-Sugano による Kudla lift ($U(1,1)$ から $U(2,1)$ へのテータリフト) の内積公式に上記の L 関数の特殊値が現れる。このような多変数保型形式との関係も注目される。

1.2 各章の内容

第 1 章は、保型 L 関数に関する主結果を、古典的な定式化において述べている。

第 2 章では、第 3 章以降必要になる記号の準備が行なわれている。特に、判別式 D の虚 2 次体 K に対して、符号 $(1,1)$ の 2 次ユニタリ群 $H=U(1,1)$ が導入され、H の様々な部分群が定義されている。この章以降においてはアデール的な枠組みで考察が行なわれている。

第 3 章は、主結果を述べるための種々の定義がされている。$H=U(1,1)$ 上の weight $l-1$ の正則尖点形式の空間 $S_{l-1}(D,\chi_0;\chi_0\Omega)$、その空間に作用する Hecke 作用素および Atkin-Lehner 作用素、保型形式 $f \in S_{l-1}(D,\chi_0;\chi_0\Omega)$ と K の整数 weight の量指標 Ξ に付随する保型 L 関数 $L(f,\Xi;s)$ が導入される。その後、主結果の証明の鍵になる Rankin-Selberg 法に必要なメタプレクティック表現、テータ級数、Eisenstein 級数が導入されている。またこの章では、Eisenstein 級数のフーリエ展開を詳細に調べることにより、Eisenstein 級数の解析接続、極の決定および関数等式が証明されている。

第 4 章において主結果が述べられている。まず、(f,Ξ) に対し、Rankin-

Selberg 積分

$$Z(f,\Xi;s)=\int_{H_{\mathbf{Q}}\backslash H_A} f(h)\overline{\theta(h)}E(h,\Xi;s)dh$$

が導入されている。ここに、$\theta(h)$ はテータ級数、$E(h,\Xi;s)$ は Eisenstein 級数である。さて、f に付随する大域的 Whittaker 関数を

$$W_f(h)=\int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}} f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}h\right)\psi(-x)dx$$

により定める (フーリエ係数のアデール的類似)。ここに、ψ は $\mathbf{Q}$ のアデール環 $\mathbf{A}$ の加法指標で、$\mathbf{Q}$ 上自明かつ $\psi(x_\infty)=\exp(2\pi i x_\infty)$ $(x_\infty\in\mathbf{R})$ なるものである。

申請者は、後に述べる局所的 Whittaker 関数の詳細な研究を用いて、$Z(f,\Xi;s)$ と $L(f,\Xi;s)$ のあいだに成立する関係を得た。さらに第3章で証明した Eisenstein 級数の解析的性質を用いることにより、次の結果を得た。(簡単のため、D は奇数とする。なお、調査論文では、一般の D に対して結果が述べられている。)

主定理. 量指標 Ξ は各有限素点で不分岐とし、保型形式 $f\in S_{l-1}(D,\chi_0;\chi_0\Omega)$ を Hecke 作用素および Atkin-Lehner 作用素の同時固有関数とする。$W_f(1_2)\neq 0$ ならば、

$$\begin{aligned}&L^*(f,\Xi;s)\\&=(2\pi)^{-2s}|D|^s\Gamma(s+(k-l)/2+1)\Gamma(s+(k+l)/2-1)L(f,\Xi;s)\end{aligned}$$

は全 s 平面に整関数として解析接続され、関数等式

$$L^*(f,\Xi;s)=L^*(f,\Xi;1-s)$$

を満たす。

第5章が、調査論文の技術的核心部分である。この章では、局所的 Whittaker 関数が導入され、その存在と一意性、ならびに明示公式が示される。

その際、D を割る素数 p (bad prime) においては、通常の Hecke 作用素に関する条件のみでは一意性が成立しないので、申請者はさらに Atkin-Lehner 作用素に関する条件を課すことによって，bad prime における困難を克服している。局所的な結果を総合することにより、主定理の条件を満たす保型形式 f に付随する大域的 Whittaker 関数が局所成分に分解することが示される。

第6章において、主定理の証明が行なわれている。(f, Ξ) に対する Rankin-Selberg 積分を f に付随する大域的 Whittaker 関数を含むアデール群上の積分に書き換える (Rankin-Selberg trick)。次に、第5章の結果 (局所的 Whittaker 関数の一意性) を用いて、この大域的積分を局所積分の積に分解する。再び、第 5 章の結果 (局所的 Whittaker 関数の明示公式) を用いて各局所積分を explicit に計算することによって、主定理が得られる。

第 7 章では、K の類数が 1 という仮定の下で、主結果が古典的な定式化の下で述べられている。

第 8 章において、主定理の条件を満たす保型形式の例として、球関数付きのテータ級数が構成され、その保型 L 関数が計算されている。

論文審査結果の要旨

申請者は、$U(1,1)$ 上の正則尖点形式に対する保型 L 関数の解析的性質、特に解析接続と関数等式を証明した。また、証明の過程で、$U(1,1)$ 上の局所的 Whittaker 関数の存在、一意性および明示公式を示した。研究対象となった保型 L 関数は、Murase-Sugano の Kudla lift の研究にも現われ、その解析的研究は重要な問題である。また一般に、保型 L 関数の関数等式を、調査論文の結果のような単純で美しい形として定式化し証明することはしばしば困難である。この意味で、申請者の得た結果は、$U(1,1)$ 上の保型形式の理論において意義が深く重要な貢献である。

保型 L 関数の解析接続と関数等式の証明は、Rankin-Selberg 法という伝統的手法によるものであるが、証明の核心部分は局所的 Whittaker 関数の

深い研究にある。K の判別式を D とするとき、D を割らない素数 p (good prime) における結果は既知のものであるが、D を割る素数 p (bad prime) における局所的 Whittaker 関数の理論は、定式化そのものが一般には難しい。特に $p=2$ においては大きな技術的困難があり、これまでの同種の研究においてはしばしば回避する傾向があった。申請者は、局所的 Whittaker 関数の定義に、通常課される Hecke 作用素に関する条件のみならず、Atkin-Lehner 作用素に関する条件を課すという巧妙な方法によって困難を克服した。その上で、$p=2$ での煩雑さを避けることなく、長く複雑な計算を実行し、すべての素数における $U(1,1)$ 上の局所的 Whittaker 関数の理論を打ちたてた。申請者の力量を最も発揮した部分といえる。これによって、保型 L 関数の単純で美しい関数等式を証明することに成功している。

このように、調査論文は、$U(1,1)$ 上の保型形式ならびに局所的 Whittaker 関数の理論について、重要かつ本質的な貢献をしている。

平成 18 年 5 月 13 日 (土) 午後 1 時 15 分より開催された公聴会において、よく整理された発表を行ない、質疑に対する応答は適切であった。

さらに、申請者は、平成 18 年 7 月 5 日 (水) 午後 4 時より行なわれた学力試験において、まず学位申請論文の概要を説明した。次に $U(1,1)$ 上の保型形式に付随する保型 L 関数の解析的性質の証明の要点、結果の意義などの質問に回答した。説明および回答の内容は的確であり、よく整理されていた。引き続いて、語学試験を行ない、整数論に関する英語の解説文献についての質問に回答した。回答は適切であり、研究者として十分な外国語 (英語) の学力を有することを示した。

今後の研究計画としては、まず、学位申請論文における技術的仮定を取り除くことを試みている。また、中長期的な研究課題として、学位申請論文において考察の対象とした保型 L 関数の特殊値の研究、特にその非零性の証明を挙げた。この問題は、あるテータリフトの非零性と密接に関連しており、重要な課題である。今後が期待される。

以上の調査結果を総合し、本調査委員会は全員一致で、申請論文を博士 (理学) 学位論文として充分に価値あるものと判定する。