博士学位論文

内容の要旨および審査の結果の要旨

第 8 号

1990年12月

京都産業大学

はしがき

本号は，学位規則（昭和28年４月１日文部省令第９号）第８条の規定による公表を目的とし，平成２年11月13日本学において博士の学位を授与した者の論文内容の要旨および論文審査の結果の要旨を収録したものである。

学位記番号に付した乙は，学位規則第５条第２項（いわゆる論文博士）によるものであることを示す。

目　次

氏　名（本籍）	齋藤立彦（山口県）
学位の種類	理学博士
学位記番号	乙理第５号
学位授与年月日	平成２年11月13日
学位授与の要件	学位規則第５条第２項該当
論文題目	Study of regular semigroups with inverse transversals （Inverse transversal をもつ正則半群の研究）
審査委員	主査　教授（工学博士）　伊藤正美 副査　教授（理学博士）　水原　亮 〃　教授（理学博士）　八杉満利子

論文内容の要旨

S^0を正則半群Sの部分半群とし，その任意の元がS^0内に一意的な逆元をもつとする。このとき，S^0を正則半群Sの inverse transversal とよぶ。Sが逆半群の場合には，SはS自身を inverse transversal としてもつので，inverse transversal をもつ正則半群は，逆半群と正則半群の間に位置することになる。申請論文の目的は，このような inverse transversal をもつ正則半群の構造を明らかにすることである。

inverse transversal をもつ正則半群の研究は，T. S. Blyth, R. McFadden 等により下記の条件(1)のもとで始められ，さらに D. C. McAlister, T. Saito 等により弱い条件(2),(3)のもとで継続され，それぞれのタイプの inverse transversal をもつ正則半群の分解定理および構成定理が与えられた：

(1) multiplicative：Sの任意の元 x, y に対して $x^0xyy^0 \in E(S^0)$（ただし，x^0, y^0は x, y の逆元，$E(S^0)$ はS^0の巾等元全体の集合）がなりたつとき，S^0を M-inverse transversal とよぶ。

(2) weakly multiplicative：Sの任意の元 x, y に対して $(x^0xyy^0)^0 \in E(S^0)$がなりたつ（このときS^0を WM-inverse transversal とよぶ）。

(3) S^0が S の擬イデアル：$S^0SS^0 \subseteqq S^0$がなりたつ（このときS^0を Q-inverse transversal とよぶ)。

しかしながら，上記のような条件をみたす正則半群は，inverse transversal をもつ正則半群のクラスの極く一部であり，inverse transversal をもつ正則半群の構造を一般的に明らかにするには程遠かった。申請論文の著書はこの問題に対し最終的な解答を与えた。以下，申請論文の内容について述べる。

申請論文は，inverse transversal をもつ正則半群に関して，1) それに付随した基本的な集合の性質，2) その分解定理，3) その構成定理，4) それが特別な半群になるための条件，を内容とし次の 4 つの既発表の論文から構成されている：

[1] Construction of a class of regular semigroups with an inverse transversal, Proc. Conference on Theory and Application of Semigroups, Greifswald (DDR), 108-113 (1984).

[2] A note on regular semigroups with inverse transversals, Semigroup Forum 33, 149-152 (1986).

[3] Quasi-orthodox semigroups with inverse transversals, Semigroup Forum 36, 47-54 (1987).

[4] Construction of regular semigroups with inverse transversals, Proc. Edinburgh Math. Soc.32, 41-51 (1989).

まず正則半群Sの構造を調べるため，次の 4 つの集合が定義される：

$$I=\{e\in S \mid ee^0=e\},\ \Lambda=\{f\in S \mid f^0f=f\},$$

$$R=\{x\in S \mid x^0x=x^0x^{00}\},\ L=\{a\in S \mid aa^0=a^{00}a^0\}$$

一般には，これら 4 つの集合は半群をなしていないが，次の関係がなりたつ（[1], Proposition 2.1)

$$R\cap L=S^0,\ I\cap\Lambda=E(S^0),\ E(R)=I,\ E(L)=\Lambda,$$

$$I\Lambda=\{x\in S \mid x^0\in E(S^0)\}$$

T. S. Blyth と R. McFadden は，S^0が M-inverse transversal であるという条件のもとに正則半群Sの構造の研究を始め，I（Λ)は右（左）可換帯になり，SはIとS^0とΛの成分に分解され，Sの演算もそれらの成分を用いて表されること，逆に右可換帯と逆半群S^0および左可換帯が与えられたとき，ある条件のもとでS^0を M-inverse transversal としてもつ正則半群を構成できることを示した。その後 D. B. McAlister, R. McFadden, T. Saito 等は，S^0が WM-inverse transversal あるいは Q-inverse transversal であるというやや弛い条件のもとに分解定理を与えた。しかしながら，R と L の存在に気付かなかったため，彼等の結果は複雑かつ不十分であった。申請論文の著者は，上記４つの集合を巧みに使うことにより次の分解定理を得た。

分解定理 I （[1]，Theorem 1.4）：S を inverse transversal S^0をもつ正則半群とする。このとき，S は半群Wに同型である：

$$W=\{(e, r, f) \in I \times S^0 \times \Lambda \mid rr^{-1}=e^0,\ r^{-1}r=f^0\}$$

$$(e, r, f)(g, s, h)=(erfg(fg)^0 r^{-1},\ r(fg)^{00}s,\ s^{-1}(fg)^0 fgsh)$$

この結果は既存の諸結果を系として含む。

R と L を用いた分解定理としては次の結果が与えられる。

分解定理 II （[1]，Theorem 1.8）：S を inverse transversal S^0をもつ正則半群とする。このとき，S は半群 U に同型である：

$$U=\{(x, a) \in R \times L \mid x^0=a^0\}$$

$$(x, a)(y, b)=(xx^0ay(ay)^0(ay)^{00},\ (ay)^{00}(ay)^0ayy^0b)$$

S を inverse transversal S^0をもつ正則半群とする。I と Λ が半群になるとき，S^0を S-inverse transversal とよぶ。M-inverse transversal, WM-inverse transversal, Q-inverse transversal は，すべて S-inverse transversal なので，S-inverse transversal を持つ正則半群についてなりたつ結果は既存の結果の一般化になっている。

系 （[1]，Corollary 1.9）：S を S-inverse transversal S^0をもつ正則半群とする。このとき，S は半群 U に同型である：

$$U=\{(x, a) \in R \times L \mid x^0=a^0\}$$

$$(x, a)(y, b)=(xx^0ay,\ ayb^0b)$$

分解定理 III （[1]，Theorem 1.12）：S を inverse transversal S^0をもつ正則半群とする。このとき，S は半群 T に同型である：

$$T=\{(x, f) \in R \times \Lambda \mid xx^0=f^0\}$$

$$(x, f)(y, h)=(xfy(fy)^0(fy)^{00},\ (fy)^0fyh)$$

系 （[1]，Corollary 1.13）：S を S-inverse transversal S^0をもつ正則半群とする。こ

のとき，Ｓは半群Ｔに同型である：

$$T=\{(x, f)\in R\times\Lambda \mid xx^0=f^0\}$$

$$(x, y)(y, h)=(xfy,\ (fy)^0fyh)$$

以上が分解定理である。次に構成定理に移る。一般にＩとΛは半群になっていないので，Ｓの構成定理を得るのは困難であった。著者はＩ（Λ）が左（右）零半群の下（上）偏鎖になることを示し（[4]，Lemma 2．1），その結果，左零半群の下偏鎖と右零半群の上偏鎖および逆半群S^0を用いてS^0を inverse transversal としてもつ正則半群の構成に成功した。

主定理（[4]，Theorem 2.5）：S^0を半束$E(S^0)$をもつ逆半群，Ｉ（Λ）を左零半群の下偏鎖 $\{La : a\in E(S^0)\}$（右零半群の上偏鎖 $\{Ra : a\in E(S^0)\}$）とする。また，$E(S^0)$がＩとΛの共通の inverse transversal になっており，写像$\Lambda\times I\rightarrow S^0((f, e)\rightarrow f*e)$ が条件：

1）$f^0(f*e)e^0=f*e$，2）$f^0*e^0=f^0e^0$，3）$f*f^0=f^0$，$e^0*e=e^0$，

4）$f^0=(f*e^0)(f*e^0)^{-1}$ならば $f^0=f*e^0$，$e^0=(f^0*e)^{-1}(f^0*e)$ ならば $e^0=f^0*e$

を満たしているものとする。さらに$S^0\times S^0$の各元（x, y）に対してΛ×ＩからＩへの部分写像$\alpha(x, y)$ およびΛ×ＩからΛへの部分写像$\beta(x, y)$ が存在し，条件：

ａ）$\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)$ の定義域が一致し$Rx^{-1}\times Lyy^{-1}$になる。さらに

$(f, e)a(x, y)\in Lx(f*e)y(x(f*e)y)^{-1}(f, e)\beta(x, y)\in R(x(f*e)y)^{-1}x(f*e)y$,

ｂ）$f\in Rx^{-1}x$, $g\in Lyy^{-1}$, $h\in Ryy^{-1}$, $k\in Lzz^{-1}$ならば $(f, g)\alpha(x, y)((f, g)\beta(x, y)h, k)$
$\alpha(x(f*g)y, z)=(f, g(h, k)\alpha(y, z))\alpha(x, y(h*k)z)$, $(f, g(h, k)\alpha(y, z))\beta(x, y(h*k)z)$
$(h, k)\beta(y, z)=((f, g)\beta(x, y)h, k)\beta(x(f*g)y, z)$，$(f*g)y((f, g)\beta(x, y)h*k)=$
$(f*g(h, k)\alpha(y, z))y(h*k)$,

ｃ）$(x^{-1}x, yy^{-1})\alpha(x, y)=xy(xy)^{-1}$，$(x^{-1}x, yy^{-1})\beta(x, y)=(xy)^{-1}xy$

を満たしているものとする。

このとき，ＷはS^0に同型な inverse transversal をもつ正則半群となる：

$$W=\{(e, r, f)\in I\times S^0\times\Lambda \mid e\in Lxx^{-1},\ f\in Rx^{-1}x\}$$

$$(e, x, f)(g, y, h)=(e(f, g)\alpha(x, y),\ x(f*g)y,\ (f, g)\beta(x, y)h)$$

逆に，inverse transversal をもつ正則半群は上記の方法で記述される。

上記の定理は，従来の種々のタイプの inverse transversal をもつ正則半群の構成定理

を含んでいる（[4]，Theorem 3.2,3.4,3.8, Corollary 3.9,3.10)。これにより正則半群に関する構成定理は完成した。さらに［1］，Theorem 2.4 では，RとLを用いての S-inverse transversal をもつ正則半群の構成法が与えられている。この結果は，Q-inverse transversal をもつ正則半群（参考論文 Structure of regular semigroups with a quasi-ideal inverse transversal, Semigroup Forum 31, 305-309 (1985), Theorem 4), S-inverse transversal をもつ巾等元により生成される正則半群（[3]，Corollary 2.5），inverse transversal をもつ quasi-orthodox 半群（[3]，Theorem 8），WM-inverse transversal もつ正則半群（参考論文 Regular semigroups with a weakly multiplicative inverse transversal, Proc. the 8th Sympo. on Semigroups, Shimane, 22-25 (1984), Theorem 7）等の構成に用いられる。また，[2]，Theorem 2 では，IとLを用いての S-inverse transversal をもつ正則半群の構成法が与えられている。この結果は，Q-inverse transversal をもつ正則半群の構成に用いられる（参考論文 Structure of regular semigroups with a quasi-ideal inverse transversal, Semigroup Forum 31, 305-309 (1985), Theorem 5)。

最後に inverse transversal S^{0}をもつ正則半群がある特別な半群になるための条件が与えられている。

1) Sが orthodox であるための必要十分条件はSの任意の元 x, y に対して，$(xy)^{0}=y^{0}x^{0}$がなりたつこと（[4]，Proposition 1.8），
2) Sが完全単純半群であるための必要十分条件は，S^{0}が群になること（[3]，Lemma 1），
3) Sが quasi-orthodox であるための必要十分条件はSの任意の元 x, y に対して，$(xy)^{0}(xy)^{00}=y^{0}x^{0}y^{00}x^{00}$がなりたつこと（[3]，Theorem 2），
4) Sが quasi-orthodox のとき，Sが orthodox であるための必要十分条件は，S^{0}が WM-inverse transversal であること（[3]，Proposition 5），
5) Sが quasi-orthodox ならば，S^{0}は S-inverse transversal である（[3]，Proposition 7），
6) Sが quasi-orthodox のとき，Sが完全正則半群であるための必要十分条件は，S^{0}の半束分解の各成分が群であること（[3]，Corollary 3）等。

そのほかにも，Sが quasi-orthodox のとき，Sが natural regular 半群であるための

必要十分条件も与えられている。

参考論文は，既に引用されたもののほかに次の２つがある。

［A］ Relationship between the inverse transversals, Semigroup Forum 33, 245-250 (1986).

［B］ Naturally ordered regular semigroups with maximum inverses, Proc. Edinburgh Math. Soc. 32, 33-39 (1989).

［A］では，正則半群が複数の inverse transversal をもつとき，それらの間の関係を調べており，［B］では，ある種の順序正則半群と inverse transversal の関係を取り扱っている。

論 文 調 査 結 果 の 要 旨

正則半群Ｓの各元がその部分半群S^0の中に唯一の逆元をもつとき，S^0をＳの inverse transversal とよぶ。申請論文の著者の研究は，inverse transversal をもつ正則半群の構造の研究である。inverse transversal をもつ正則半群の研究に関してはすでに T. S. Blyth, D. B. McAlister, R. McFadden 等の研究があるが，いずれの場合もS^0が M-inverse transversal あるいは Q-inverse transversal である等，強い条件を仮定している。したがって，inverse transversal をもつ正則半群の分解定理，構造定理のいずれの取り扱いも複雑かつ不十分であった。著者はS^0に対する条件なしに inverse transversal をもつ正則半群の分解定理および構成定理が得られることを示した。特に，S-inverse transversal をもつ正則半群の構造に関しては美しい結果を得ている。これらの結果はそれまで多くの研究者達によって為されてきた研究結果を包含する最終的な結果であると共に，ある種の順序正則半群の構造を明らかにする等，あたらしい応用的側面も持っている。ここに著者の問題解決能力の高さと結果の有用性が認められる。

提出された論文は四つの論文により構成されている。いずれも国際的な専門誌に掲載されており，半群論の専門家達から高く評価されている。

参考論文も興味ある結果を提出しており，申請論文で得た結果の有用性と応用の広さを示している。

以上を総合して，申請論文が半群論の分野に新しい重要な知見をもたらすものとして，申請者は，理学博士の学位を授与される資格があるものと認める。

氏　名（本籍）	鷲原雅子（わしはらまさこ）　（大阪府）
学位の種類	理学博士
学位記番号	乙理第6号
学位授与年月日	平成2年11月13日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
論文題目	Banach's theorems in ranked vector spaces （階位ベクトル空間におけるバナッハの諸定理）
審査委員	主査　教授（理学博士）　八杉満利子
	副査　教授（理学博士）　水原　亮
	〃　教授（工学博士）　伊藤正美

論文内容の要旨

階位空間（ranked space；以下ｒ－空間と略）の概念は，距離空間の一つの一般化として，1950年代にKunugiが導入した。ｒ－空間は局所コンパクト性と完備性の統一的扱いを可能にする。特に距離空間ではｒ－完備と，普通の完備とは同等になる。kunugiの最初の着想は，完備距離空間と局所凸空間の共通点（特にBaireカテゴリー定理）の統一的取り扱いにあった。その後解析学の種々な理論がｒ－空間で再構築されている。関数解析学において，Banachの諸定理（閉グラフ定理，開写像定理，一様有界定理）は最も基本的であるが，申請論文の目的は，ｒ－空間でのこれらの定理の状況の解明である。特に“ω型”のｒ－空間を扱っているが，重要な空間はすべてω－型である。

以下，申請論文の内容について述べる。

申請論文は，ｒ－ベクトル空間に条件を加えた，狭義の（strict；以下ｓ－と略）ｒ－空間を定義し，そのような空間におけるBanachの諸定理のための（自然な）十分条件を求めた。それらは次の3つの既発表論文から構成されている。

[1] Banach's theorems in ranked vector spases, Math. Japonica, 27 (1982), 449-465.

[2] Closed graph theorem in ranked vector spaces, ibid. 31 (1986), 993-998.

[3] Uniform boundedness theorem in ranked vector spaces, ibid. 34 (1989), 655-659.

r－ベクトル空間は，線形演算がr－連続なベクトル空間である。これでは広すぎて好ましい結果が得られない。そこで著者はより強く，しかもFréchet空間，(LF)空間，超関数空間D′ 等を含む程度に緩やかな公理（S）を考察し，それを満たすr－ベクトル空間をs－ベクトル空間と呼ぶ。

（S） Eがベクトル空間で，VがE上の均質かつ円形の階位構造であるとする。

(S. 1)(i) 原点の任意の2つの原近傍V_1，V_2を共に含み，より小さい階位の原点の原近傍Uがある。

(ii) 上記のようなV_1，V_2，Uに対して，任意に大きい階位のVがUとV_1+V_2の間にある。

(S. 2)(i) Eの各元xは，ある原点の原近傍Uに吸収される。

(ii) このとき，任意に大きい階位を持つ原点の原近傍で，xを吸収しUに含まれるものがある。

以下E，Fをs－r－ベクトル空間とする。

主要結果I E，Fがr－完備，Fが第一可算性を有するとき，下記のことが成立する。

(A) （閉グラフ定理）EからFへの線形演算がr－閉グラフを持つならば，r－連続である。([1]，§3，Corollary 1)

(B) （開写像定理）さらに，Eに分離公理を仮定すれば，EからFへのr－連続な線形演算はr－開演算である。([1]，§3，Corollary 2)

証明はRaikovにならってEからFへの線形関係Rについての次の定理を示し，その系として(A)と(B)を得る。

定理（[1]，Theorem 3）E，Fについて上の仮定のもとで，D(R)＝E，Rのグラフがr－閉グラフならば，Rはr－連続である。

主要結果II E，Fがr－完備，Fがr－正則かつ第一可算性を有するとき，一様有界性が成立する。すなわち，EからFへのr－連続な線形演算の族Tについて次の(a)，(b)，(c)は同値である。([1]，Theorem 4.1) (a)　Eの各点xについて$\mathcal{T}$(x)は有界集合。

(b)　Eの各有界集合Bについて，$\mathcal{T}$(B)は有界集合。

(c)　$\mathcal{T}$はr－同程度連続。

以下の結果のためには，いくつかの付随条件が必要である。それらをまず列挙する。

(I_0)（Nakanishi）Eにおいて，平行移動がr－連続ならば，$x_n \xrightarrow[(r)]{} x$と，原点のある基本列uについて，$x_n \xrightarrow[(u)]{} x$とが同等である。

(I_4*)（著者）Eにおいて，原点の各基本列が正規部分列をもつ。ただし，{U_i}が正規とは，“U_iがU_{i+1}に関して円形である。”

(R*－完備)（著者）原点の各基本列uに対して，完備的なvでv＞uのものがある。ただし，vが完備的とは，原点の基本列が（v）－Cauchyならば（v）－収束なことであり，v＞uとはvがuの一種の上部構造になっていることである。

さらにde Wildeの網の概念を拡張して，次の結果を得た。

主要結果III　E，Fはr－ベクトル空間で，条件（I_0），（I_4*），（R*－完備）を満すとする。また，Fはr－網を持つとする。このとき，EからFへの線形関係Rが，r－閉領域およびグラフを持てば，r－連続である。([2] Theorem 1)

主要結果IV　r－ベクトル空間E，Fが（I_4*）を満たし，EがR*－完備，Fがr－正則かつ第一可算性を持つならば，Eのr－閉部分空間DからFへのr－連続な線形演算の族$\mathcal{T}$について，前出の(a)，(b)，(c)は同等である。([3]，Theorem 1)

以上の外，Banach-Steinhouseの定理等，いくつかの命題の証明と，いくつかの例が含まれている。

論文調査結果の要旨

階位空間（ranked space）の概念は，Kunugiによって1950年代に提唱された。その特徴は近傍に階位（rank）と呼ばれる順序数（たとえば自然数）を対応させて，基本近傍列を定義し，それによって収束，完備等を定義することにある。これによって完備距離空間と局所コンパクト（Hausdorff）空間に対して成立するBaireカテゴリー定理の統一的扱いが可能になる。

一方，線形位相空間における Banach の諸定理の拡張が，著名な解析学者達によって数十年間行われてきた。

位相を階位構造として把え，解析学の再構成が多方面で行われてきたが，これら Banach の諸定理については最近まで不成功であった。著者は，そのような十分条件の着想を得，階位空間における Banach の諸定理を証明した。証明は，古典的方法と階位構造の特徴との巧みな組み合せによる。また上記十分条件は，距離空間に近いが，超関数の空間 D′ 等重要な空間を含む十分緩やかなものであることも示されている。従って，一般的すぎる空間では成立しない解析学の諸定理への展望も期待される。ここに，著者の独創性とともに，階位空間と関数解析学に対する洞察力が認められる。

提出された論文は，三つの既発表論文により構成され，階位空間の専門家達から高く評価されている。また引用されている著者の参考論文も重要な意味を持っている。

以上を総合して，申請論文が関数解析学の分野に新しい重要な知見をもたらすものとして，申請者は理学博士の学位を授与される資格があるものと認める。