# 博 士 学 位 論 文

内容の要旨および審査の結果の要旨

第　4　号

京 都 産 業 大 学

## は　し　が　き

本号は，学位規則（昭和28年４月１日文部省令第９号）第８条の規定による公表を目的とし，昭和58年７月15日本学において博士の学位を授与した者の論文内容の要旨および論文審査の結果の要旨を収録したものである。

学位記番号に付した乙は，学位規則第５条第２項（いわゆる論文博士）を示す。

# 目　　　次

| | |
|---|---|
| 氏 名・(本籍) | 水 原 亮 (京都府) |
| 学位の種類 | 理 学 博 士 |
| 学位記番号 | 乙 理 第1号 (文部省への報告番号 乙 第1号) |
| 学位授与の日付 | 昭和58年7月15日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第5条第2項該当 |
| 学位論文題目 | On left symmetric algebras over a solvable Lie algebra |
| 論文審査委員 | 主 査 教授(理学博士) 松 田 道 彦 |
| | 副 査 教授(工学博士) 樋 木 義 一 |
| | 副 査 教授(工学博士) 藤 井 宏 |
| | 副 査 教授(理学博士) 森 真 一 |

## 論文内容の要旨

1968年，松島与三は次の定理を与えた[Osaka J. Math., 5 (1968)]。G を n 次元連結複素リー群とし，$\mathfrak{G}$ をGのリー環とするとき，次の四条件は同値である。

(i) Gは左不変複素アフィン構造をもつ。

(ii) Gからn次元複素アフィン空間への正則挿入写像DとGからn次元アフィン変換群への準同型写像$\alpha$があって

$$D(ab)=\alpha(a)D(b), \quad a, b \in G$$

が成り立つ。

(iii) G上左不変正則平坦な線形接続が存在する。

(iv) $\mathfrak{G}$ 上左対称多元環 $\mathfrak{G}(A)$ の構造が存在する。

ここに，リー環 $\mathfrak{G}$ 上の左対称多元環 $\mathfrak{G}(A)$ とは，任意の $\mathfrak{G}$ の元 a，b に対して双線形二項演算 ab が定義され，この積に関して次の二条件がみたされることである。

$$(ab)c-a(bc)=(ba)c-b(ac), \qquad [a, b]=ab-ba$$

第二式の左辺はリー積を示す。逆に有限次元の多元環Aが第一式をみたすならば，第二式によってA上リー積が定義され，Aにリー環 $\mathfrak{G}(A)$の構造が入る。このときAをリー環 $\mathfrak{G}(A)$ 上の左対称多元環とよぶ。

この松島の定理から次の問題が示唆される。いかなるリー環上に左対称多元環の構造が存在するか。また左対称多元環は多元環としていかなる構造をもつか。

この問題の解例としては J. Scheuneman のリー環が三段（3 − step）ベキ零の場合の結果 [Proc. Amer. Math. Society. 46 (1974)] その他があるが極めて特殊な場合に限られている。

本論文に於て，申請者はこの問題を解くために左対称多元環の左積を通して次のように $\mathfrak{G}$(A) の左積に関する結合的包絡環 $\mathfrak{L}^*$ を構成する。$\mathfrak{G}$(A) の元 a の左積が引き起す A 上の線形自己準同型 La の全体を $\mathfrak{L}$ とすれば，$\mathfrak{L}$ は A の線形自己準同型環 $\mathfrak{gl}$(A) の部分リー環であって，$\mathfrak{G}$ の元 a に $\mathfrak{L}$ の元 La を対応させれば $\mathfrak{G}$ から $\mathfrak{L}$ へのリー準同型を得る。$\mathfrak{L}$ は一般には結合的多元環にはならない。$\mathfrak{L}$ によって生成される $\mathfrak{gl}$(A) 内の結合的多元環 $\mathfrak{L}^*$ が $\mathfrak{G}$(A) の左積に関する結合的包絡環である。

線形リー環の結合的包絡環そのものの概念は既知であって，N. Jacobson 等の研究があり，その成果の一つは主定理の証明に用いられる。

J. Helmstetter [Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29 (1979)] および A. Medina [C. R. Acad. Sci. Paris, 286 (1978)] は，各 a に対して La がベキ零一次変換である場合に結果を与えている。

本論文の主定理は次の通りである。A を可解リー環 $\mathfrak{G}$(A) 上の左対称多元環とする。このとき $\mathfrak{L}^*$ が半単純であれば $\mathfrak{G}$(A) は可換核 $\mathfrak{b}$ をもつ可換リー環 $\mathfrak{A}$ の拡大であって，$\mathfrak{b}$ の基底 $\{y_j\}$ と $\mathfrak{A}$ 上の定数値線形写像の組 $\{\lambda_j\}$ が存在して

$$[x, y_j] = \lambda_j(x) y_j, \quad x \in \mathfrak{A}$$

が成り立つ（§ 1）。

証明はまず次のようにして $\mathfrak{L}^*$ が可換であることを導く。$\mathfrak{G}$(A) が可解であるからその準同型像 $\mathfrak{L}$ も可解である。ここで次の定理を用いる。線形可解リー環 $\mathfrak{H}$ でその結合的包絡環 $\mathfrak{H}^*$ が半単純であれば $\mathfrak{H}^*$ は可換である [N. Jacobson, Lie algebras, Interscience Tracts 10 (1962), Chap. II, Th. 8, Cor. 1]。これより $\mathfrak{L}^*$ は可換である。

以後の証明は次の通りである。古典的な Dedekind の定理より可換結合的多元環が半単純であれば，それは互に零化する体の直和に分解する。したがって $\mathfrak{gl}(A)$ 内の直交冪等写像の組が存在して，これらによって $\mathfrak{L}^*$ は生成される。またAを $\mathfrak{L}^*$ －不変部分空間の直和に分解すれば，その分解は一意であって，$\mathfrak{L}$ が左積によって作られたリー環であることから，各直和因子はAの左イデアルとなり，それ自身また左対称部分多元環の構造をもつ。この各直和因子がM型リー環であることを，補題2，3，4，5を準備しつつ $\mathfrak{L}^*$ の生成元を用いて左積とリー積の関係を計算して導く。ここにリー環 $\mathfrak{H}$ がM型であるとは，$\mathfrak{H}$ の任意の元a，bに対して［a，b］がaとbの線形結合でかけることである。この概念は J. Milnor によって得られたものである［Advances in Math.，21(1976)］。このM型リー環に関して準備されていた補題1によって各直和因子の構造が明らかになる（§2）。最後に補題6を用意して各因子間の積とリー積を計算する。ここに補題6およびそれに続く議論［(i)，(ii)］は，問題の既約性のための，すなわち直和因子が二組の左対称多元環を形成しないための必要条件を与える（§3）。このようにして左対称多元環の構造を決定しつつ証明を完結する。

参考論文1においてはリー環 $\mathfrak{G}$ 上の左対称多元環 $\mathfrak{G}$(A) の根基について考察し，$\mathfrak{G}$ が複素ベキ零リー環であれば $\mathfrak{G}$(A) の根基は両側イデアルであることを証明している。この根基の概念は結合的多元環の場合を一般化して，J. L. Koszul 等によって与えられたものである。

参考論文2においては，連結単純複素リー群上の左不変エルミット計量に関する正則合同変換群Gについて考察し，単位元を含む連結成分はGの元による左積と右積とから生成されるリー群であることを証明している。

参考論文3においては“可解リー群上には常に左不変完備平坦接続が存在する”という L. Auslander の予想について考察し，二つのリー群がともに左不変完備平坦接続をもつならばその半直積上に左不変完備平坦接続が存在することを示している。

## 論文審査の結果の要旨

リー環上に左対称多元環が存在するとき，両者の構造を決定する課題は，幾何学的見地からも興味あることであり，重要である。しかしながらその解決例は少ない。申請者は左対称多元環の左積を通して結合的包絡環を構成し，その特性からリー環および左対称多元環の構造を決定しようとする。ここに申請者の独創性がある。申請論文においては，リー環が可解であって結合的包絡環が半単純である場合にリー環および左対称多元環の構造を決定する。証明の急所はこの条件の下で結合的包絡環が可換であることに着目することにあり，以後の証明によどみはない。このようにして申請論文は一つの発想とそれに従う一つの定理とその証明から成り立つ。申請者の開拓したこの方法によって上の構造決定問題が新しい成果を得てさらに発展することが期待できる。

三つの参考論文もそれぞれ興味ある結果を提出している。

以上を総合して申請者は理学博士の学位を授与される資格があるものと認める。

博士学位論文内容の要旨および審査の結果の要旨　第４号

昭和58年８月１日　発 行

発 行　京 都 産 業 大 学

編 集　京都産業大学大学院事務室