京都産業大学経済学レビュー　No.8　（令和３年３月）

複数公共財の配分問題

加茂知幸

要旨

複数種類の公共財が存在する経済での公共財配分について考察する。2 人 2 公共財経済において、各個人の自発的供給によって公共財の供給量が決まる場合、ナッシュ均衡において実現する配分はパレート最適であることが示される。また、個人同士の交渉により公共財配分を決める場合、ナッシュ交渉解として実現する配分が自発的供給のナッシュ均衡配分と一致するための十分条件が提示される。

キーワード：複数公共財、自発的供給、パレート最適性、ナッシュ均衡、ナッシュ交渉解

1.　はじめに

公共財が存在する経済における資源配分のあり方は、経済学において重要な研究課題のひとつである。特に、公共財が複数種類あるとき、稀少な資源をどの公共財にどれくらい割り当てるべきかを考える必要があり、問題はかなり複雑になる。私的財であれば、市場メカニズムによって効率的な配分が達成できるが（厚生経済学の第一基本定理）、公共財の場合、市場メカニズムはうまく機能しないことが知られている。現実には、(1) 政府が供給する、または、(2) 各主体が自発的（私的）に供給する、という 2 つのパターンが主流である。前者の例は、様々な公共支出に対する予算案を議会で決定するケースである。この場合、議員は選挙によって選ばれているので、投票によって公共財配分を決めていると見ることができる。後者の例として、個人が地方公共団体や各種 NPO 法人に対して寄付を行い、その寄付金によって様々な公益サービスが提供されている。また、世界各国は集団安全保障のための軍事防衛費、途上国の経済発展のための ODA、あるいは地球温暖化に代表されるグローバルな環境問題のために様々な拠出を行なっている。

本論文では、複数種類の公共財が存在する経済において、各主体が自発的に各種公共財を供給するときに実現する配分について考察する。各主体が独立に公共財への拠出量を決めるとき、問題となるのは配分の効率性である。例えば、各個人が独立に寄付行為を行う場合、寄付金総額は各種公共サービスへ最適に配分されているだろうか？本稿では、主体の数と公共財の数がともに 2 であるとき、この問題に対して肯定的な解答を与える。さらに、各主体が協力して各公共財への拠出額を決めることができるとき、交渉の結果として実現する配分について考察する。例えば、世界各国が事前に交渉を行った上で、各国で協調して国際

公共財への拠出額を決めるならば、各国が独立で行う場合とは異なる結果になるだろうか？この問題に対して、本稿では、主体同士の交渉によって公共財配分が変化しない条件を提示する。

複数公共財の配分とその性質に関する先行研究に対する本稿の位置づけを確認しておこう。Aumann, Kurz, and Neyman(1983,1987)は、複数の公共財が存在する多人数経済（nonatomic players）において、投票によって配分を決めるとき、シャープレイ値に対応する配分は投票の重みに依存しないことを示している。Kamo(2009)は、AKN と同様の設定で、各個人が自発的に供給するときのナッシュ均衡配分の効率性について分析している。本稿では、これら先行研究の結果を踏まえて、非協力ゲームのアプローチと協力ゲームのアプローチを統合した分析を行う[1]。

本論文の以降の構成は次のとおりである。次節では、分析対象となる経済モデルを提示し、分析の土台となる戦略形ゲームを定式化する。3 節では、自発的供給メカニズムのナッシュ均衡として達成される公共財配分の性質について議論する。4 節では、交渉の結果として実現する公共財配分を検討し、自発的供給のナッシュ均衡配分との関係について検討する。5 節では、本稿で得られた結果について数値例を用いて確認する。6 節では、本稿の結果を吟味し、今後の課題について述べる。

2. モデル

2-1. 2 人 2 財経済

本稿のモデルは、Aumann, Kurz, and Neyman(1983,1987)および Kamo(2009)で定式化された一般的なモデルの特殊ケースである。個人は 2 人（A と B）、公共財は 2 種類（1 と 2）とする。個人は自身の所有する資源を公共財供給のために拠出する。個人の所有する資源は消費できない（non-consumable）とする。各個人が拠出した資源の合計を用いて公共財が生産され消費される。個人hの所有する資源量をe^hとし、公共財iに対する拠出量をx_i^hとする（$h=A,B, i=1,2$）。ただし

$$x_1^h + x_2^h \leq e^h \qquad (h=A,B)$$

である。公共財iの供給量y_iは、拠出額合計$z_i(=x_i^A+x_i^B)$と生産関数$f_i(z_i)$によって決まる（$i=1,2$）。個人の公共財に対する選好はフォンノイマン・モルゲンシュテルン効用関数$u^h(y_1,y_2)$によって表されるとする（$h=A,B$）。

本稿の分析対象となるモデル経済は、個人の特性と生産技術のプロファイルによって規定され、それをEと表記する。

$$E=\big((e^A,u^A),(e^B,u^B),(f_1,f_2)\big)$$

[1] 本稿のアプローチとは異なるが、Bilodeau and Slivinski（1997）は、複数の NPO 法人が公共財の供給を決めるモデルを用いて、自発的寄付による複数公共財の配分について議論している。

Eの基本データに関して以下の標準的な仮定をおく。

仮定 1.
（ｉ）$e^h > 0$　$(h = A, B)$．
（ⅱ）効用関数$u^h: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$は$C^1$級の単調増加な狭義凹関数である（$h = A, B$）。
（ⅲ）生産関数$f_i: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$は$C^1$級の単調増加な凹関数で、$f_i(0) = 0$をみたす（$i = 1,2$）。

Eにおいて実現可能（feasible）な公共財配分の集合をYとする。

$$Y = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} y_i \leq f_i(z_i), i = 1,2 \\ z_1 + z_2 \leq e^A + e^B \end{array} \right\}.$$

Yの境界を∂Yと表記する。

$$\partial Y = \{(y_1, y_2) \in Y \mid \nexists (y_1', y_2') \in Y\colon\ y_1' \geq y_1, y_2' \geq y_2, (y_1', y_2') \neq (y_1, y_2)\}.$$

∂YはEの生産可能性フロンティア（production possibility frontier）である。

公共財配分を評価するとき最も基本的な評価基準はパレート最適性である。

定義 1. 配分$(y_1, y_2) \in Y$がパレート最適（Pareto optimal）であるとは、$u^h(y_1', y_2') \geq u^h(y_1, y_2)$ $(h = A, B)$ かつ少なくとも１つの不等式が厳密な不等号で成り立つような別の配分$(y_1', y_2') \in Y$が存在しない場合をいう。パレート最適な配分の集合をPと表記する。

個人hにとってYに属する配分のうちもっとも好ましいものを$\boldsymbol{y}^h = (y_1^h, y_2^h)$とし、$\boldsymbol{y}^h$を実現する資源投入量を$\bar{\boldsymbol{z}}^h = (\bar{z}_1^h, \bar{z}_2^h)$とする（$h = A, B$）。$\boldsymbol{y}^h$は以下の最適化問題の解である。

$$\boldsymbol{y}^h = \mathrm{argmax}\{u^h(y_1, y_2) \mid (y_1, y_2) \in Y\}.$$

$\boldsymbol{y}^h$は明らかにパレート最適である。個人の公共財に対する選好が異なるとき、その理想点$\boldsymbol{y}^h$は個人により異なる。ここで、以下を仮定しても一般性を失わない。

仮定 2.　$y_1^A > y_1^B$.

これは、個人 A は個人 B よりも公共財 1 をより選好することを意味している。

以下の命題はEのパレート最適配分を特徴づけるものである。命題より、Pは線分と微分同相なC^1-多様体であることがわかる。

命題 1. 配分(y_1, y_2)がパレート最適であるための必要十分条件は、（ｉ）$(y_1, y_2) \in \partial Y$ かつ（ⅱ）$y_1^B \leq y_1 \leq y_1^A$である。すなわち

$$P = \partial Y \cap \{(y_1, y_2) \in Y \mid y_1^B \leq y_1 \leq y_1^A\}.$$

［証明］明らかに$P \subset \partial Y$であるから、議論を∂Y上の配分に制限する。$\bar{e} = e^A + e^B$とおくと

$$\partial Y = \{(f_1(t\bar{e}), f_2((1-t)\bar{e})) \in Y \ \mid \ 0 \le t \le 1\}$$

より、∂Yと閉区間$[0,1]$を同一視する。$t^h = \bar{z}_1^h/\bar{e}$（$h = A, B$）とおくと、仮定 2 より、$t^A > t^B$である。ここで、$U^h(t) = u^h(f_1(t\bar{e}), f_2((1-t)\bar{e}))$（$0 \le t \le 1$）と定義すると、$U^h$は$\partial Y = [0,1]$上の個人$h$の選好をあらわす。$u^h$は狭義凹関数であるので、$U^h$は$t^h$を理想点（bliss point）とする単峰性（single-peaked）を示す。すなわち、任意の$t', t'' \in [0,1]$について

（ｉ）$t' < t'' \le t^h$ ならば $U^h(t') < U^h(t'')$;

（ⅱ）$t^h \le t' < t''$ ならば $U^h(t') > U^h(t'')$

が成り立つ。$t' < t^B$のとき、$U^h(t^B) > U^h(t')$（$h = A, B$)であるから、t'はパレート最適ではない。$t' > t^A$のとき、$U^h(t^A) > U^h(t')$（$h = A, B$)であるから、t'はパレート最適ではない。$t^B \le t' \le t^A$のとき、$t' < t''$ならば$U^A(t') < U^A(t'')$かつ$U^B(t') > U^B(t'')$であり、$t'' < t'$ならば$U^A(t'') < U^A(t')$かつ$U^B(t'') > U^B(t')$である。つまり、t'をパレート改善するt''は存在しない。したがってt'はパレート最適である。以上より、$P = [t^B, t^A]$であることが示された。□

2-2. 公共財ゲーム

経済Eを戦略形ゲームとして定式化しよう。プレイヤーは個人 A と個人 B である。プレイヤーhの戦略は公共財に対する拠出$\boldsymbol{x}^h = (x_1^h, x_2^h)$である（$h = A, B$)。したがって、プレイヤー$h$の戦略集合は$X^h = \{(x_1^h, x_2^h) \in \mathbb{R}_+^2 \ \mid \ x_1^h + x_2^h \le e^h\}$である。プレイヤーの戦略プロファイルが$(\boldsymbol{x}^A, \boldsymbol{x}^B)$であるとき、公共財$i$の供給量は$y_i = f_i(x_i^A + x_i^B)$となる（$i = 1,2$)。つまり、プレイヤー$h$の利得関数$v^h: X^A \times X^B \to \mathbb{R}$は次のように定義される。

$$v^h(\boldsymbol{x}^A, \boldsymbol{x}^B) = u^h\left(f_1(x_1^A + x_1^B), f_2(x_2^A + x_2^B)\right) \qquad (h = A, B).$$

このようにして定式化された戦略形ゲームをΓとする。

定義 2. Γのナッシュ均衡（Nash equilibrium）とは、以下の条件を満たす戦略プロファイル$(\boldsymbol{x}^{*A}, \boldsymbol{x}^{*B})$である。

（ｉ）すべての$\boldsymbol{x}^A \in X^A$に対して$v^A(\boldsymbol{x}^{*A}, \boldsymbol{x}^{*B}) \ge v^A(\boldsymbol{x}^A, \boldsymbol{x}^{*B})$.

（ⅱ）すべての$\boldsymbol{x}^B \in X^B$に対して$v^B(\boldsymbol{x}^{*A}, \boldsymbol{x}^{*B}) \ge v^B(\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^{*B})$.

Γにおける戦略集合X^hは無限集合であるから、Nash(1951)によるナッシュ均衡の存在定理を直接適用することができない。しかし、仮定 1 のもとでは、ナッシュ均衡の存在が保証される。

命題 2. Γは少なくとも一つのナッシュ均衡をもつ。

［証明］プレイヤーhの最適応答は以下のように定義される（$h = A, B$)。

$$\beta^h(\boldsymbol{x}^k) = \mathrm{argmax}\{v^h(\boldsymbol{x}^A, \boldsymbol{x}^B) \mid \boldsymbol{x}^h \in X^h\} \quad (\ k \neq h).$$

X^hはコンパクト凸集合で、v^hは連続な狭義凹関数であるから、$\beta^h: X^k \to X^h$は連続関数である。ここで、$\beta: X^A \times X^B \to X^A \times X^B$を

$$\beta(\boldsymbol{x}^A, \boldsymbol{x}^B) = \beta^A(\boldsymbol{x}^B) \times \beta^B(\boldsymbol{x}^A)$$

と定義すると、βは連続関数である。Brouwer の不動点定理より、βの不動点$(\boldsymbol{x}^{*A}, \boldsymbol{x}^{*B})$が存在する。$(\boldsymbol{x}^{*A}, \boldsymbol{x}^{*B})$はナッシュ均衡の定義をみたす。□

3. ナッシュ均衡配分

本節では、各個人が独立に公共財に対する拠出を決めるとき、Γのナッシュ均衡として実現するEの配分の特徴づけを行う。

定義 3.　Eの配分$\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*) \in Y$がナッシュ均衡配分（Nash equilibrium allocation）であるとは、Γのナッシュ均衡で実現する配分、すなわち

$$\boldsymbol{y}^* = \left(f_1(x_1^{*A} + x_1^{*B}), f_2(x_2^{*A} + x_2^{*B})\right)$$

となるΓのナッシュ均衡$(\boldsymbol{x}^{*A}, \boldsymbol{x}^{*B})$が存在する場合をいう。

Eのナッシュ均衡配分は次の定理によって完全に特徴づけられる。

定理 1. $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$を$E$のナッシュ均衡配分とする。

（ｉ）$e^B \leq \bar{z}_2^A$のとき、$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}^A$である。

（ⅱ）$e^A \leq \bar{z}_1^B$のとき、$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}^B$である。

（ⅲ）$e^A > \bar{z}_1^B$かつ $e^B > \bar{z}_2^A$のとき、$\boldsymbol{y}^* = \left(f_1(e^A), f_2(e^B)\right)$である。

［証明］仮定 1 より利得関数は単調増加であるから、プレイヤーhの戦略集合を$\partial X^h = \left\{\left(x_1^h, x_2^h\right) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1^h + x_2^h = e^h\right\}$に制限して考えてよい（$h = A, B$）。プレイヤーの戦略プロファイルが$\partial X^A \times \partial X^B$上にあるとき、実現する配分は$\partial Y$に属する。命題 1 の証明で示したように、個人$h$の選好を$\partial Y$上に制限したものは$\boldsymbol{y}^h$を理想点とする単峰性を示す。プレイヤーの$\partial Y$上の選好は単峰的であることから、プレイヤーA の最適応答は

$$\beta^A(\boldsymbol{x}^B) = \begin{cases} (e^A, 0) & (x_1^B \leq \bar{z}_1^A - e^A \text{のとき}) \\ (\bar{z}_1^A - x_1^B, \bar{z}_2^A - x_2^B) & (\bar{z}_1^A - e^A < x_1^B < \bar{z}_1^A \text{のとき}) \\ (0, e^A) & (x_1^B \geq \bar{z}_1^A \text{のとき}) \end{cases}$$

プレイヤーB の最適応答は

$$\beta^B(\boldsymbol{x}^A)=\begin{cases}(e^B,0) & (x_1^A\le\bar{z}_1^B-e^B\text{のとき})\\(\bar{z}_1^B-x_1^A,\bar{z}_2^B-x_2^A) & (\bar{z}_1^B-e^B<x_1^A<\bar{z}_1^B\text{のとき})\\(0,e^B) & (x_1^A\ge\bar{z}_1^B\text{のとき})\end{cases}$$

である。

（ i ）$e^B\le\bar{z}_2^A$のとき$e^A\ge\bar{z}_1^A$である。$x_1^B\le\bar{z}_1^A$であれば、$\bar{z}_i^A=x_i^A+x_i^B$ $(i=1,2)$となる $\boldsymbol{x}^A\in\partial X^A$が存在する。つまり、A は B の戦略が$x_1^B\le\bar{z}_1^A$である限り、必ず自身の理想配分 $\boldsymbol{y}^A$ を実現することができる。$x_1^B>\bar{z}_1^A$のとき、x_1^Aが増加するほど、実現する配分は$\boldsymbol{y}^A$から遠ざかるので、$x_1^A=0$が最適である。したがって、A の最適応答は次のように書くことができる。

$$\beta^A(\boldsymbol{x}^B)=(\max\{\bar{z}_1^A-x_1^B,0\},e^A-\max\{\bar{z}_1^A-x_1^B,0\})$$

$\boldsymbol{x}^B=(0,e^B)$のとき、$\beta^A(\boldsymbol{x}^B)=(\bar{z}_1^A,e^A-\bar{z}_1^A)$である。$\boldsymbol{x}^A=(\bar{z}_1^A,e^A-\bar{z}_1^A)$のとき、$\bar{z}_1^A>\bar{z}_1^B$より、$\beta^B(\boldsymbol{x}^A)=(0,e^B)$である。つまり

$$\boldsymbol{x}^{*A}=(\bar{z}_1^A,e^A-\bar{z}_1^A)\ ,\boldsymbol{x}^{*B}=(0,e^B)$$

はナッシュ均衡であり、$\boldsymbol{y}^A$はナッシュ均衡配分である。一方、$0<x_1^B<\bar{z}_1^A$をみたす$\boldsymbol{x}^B$に対して、$\beta^A(\boldsymbol{x}^B)=(\bar{z}_1^A-x_1^B,e^A-\bar{z}_1^A+x_1^B)$である。ここで、$\bar{z}_1^B-(\bar{z}_1^A-x_1^B)=x_1^B-(\bar{z}_1^A-\bar{z}_1^B)\neq x_1^B$であるから、$\boldsymbol{x}^A=(\bar{z}_1^A-x_1^B,e^A-\bar{z}_1^A+x_1^B)$に対して、$\beta^B(\boldsymbol{x}^A)\neq\boldsymbol{x}^B$である。一方、$x_1^B\ge\bar{z}_1^A$をみたす$\boldsymbol{x}^B$に対して、$\beta^A(\boldsymbol{x}^B)=(0,e^A)$である。$\boldsymbol{x}^A=(0,e^A)$に対して、$\beta^B(\boldsymbol{x}^A)=(\min\{\bar{z}_1^B,e^B\},e^B-\min\{\bar{z}_1^B,e^B\})$であるが、$\min\{\bar{z}_1^B,e^B\}\le\bar{z}_1^B<\bar{z}_1^A$であるから、$\beta^B(\boldsymbol{x}^A)\neq\boldsymbol{x}^B$である。つまり、$x_1^B>0$となるナッシュ均衡は存在しない。したがって、ナッシュ均衡配分は$\boldsymbol{y}^A$のみである。

（ ii ）$e^A\le\bar{z}_1^B$のとき、（ i ）と同様の議論により、ナッシュ均衡配分は$\boldsymbol{y}^B$のみとなる。

（iii）$\boldsymbol{x}^B=(0,e^B)$のとき、$e^B>\bar{z}_2^A$より$e^A\le\bar{z}_1^A$であるから、$\beta^A(\boldsymbol{x}^B)=(e^A,0)$である。$\boldsymbol{x}^A=(e^A,0)$のとき、$e^A>\bar{z}_1^B$より$e^B\le\bar{z}_2^B$であるから、$\beta^B(\boldsymbol{x}^A)=(0,e^B)$である。つまり

$$\boldsymbol{x}^{*A}=(e^A,0)\ ,\boldsymbol{x}^{*B}=(0,e^B)$$

はナッシュ均衡であり、$\boldsymbol{y}^*=\big(f_1(e^A),f_2(e^B)\big)$はナッシュ均衡配分である。ここで、$\hat{\boldsymbol{y}}$を$\boldsymbol{y}^*$とは異なる配分とし、$\hat{\boldsymbol{y}}$を実現する戦略プロファイルを$(\hat{\boldsymbol{x}}^A,\hat{\boldsymbol{x}}^B)$とする。$\hat{\boldsymbol{y}}\neq\boldsymbol{y}^*$より$(\hat{\boldsymbol{x}}^A,\hat{\boldsymbol{x}}^B)\neq(\boldsymbol{x}^{*A},\boldsymbol{x}^{*B})$ある。すなわち、$\hat{x}_2^A>0$または$\hat{x}_1^B>0$のいずれか（あるいは両方）が成り立つ。$\hat{x}_2^A>0$のとき、プレイヤーA は$x_2^A$を減らして$x_1^A$を増やすことで利得を増加させることができる。$\hat{x}_1^B>0$のとき、プレイヤーB は$x_1^B$を減らして$x_2^B$を増やすことで利得を増加させることができる。つまり、$\hat{\boldsymbol{y}}$はナッシュ均衡配分とはなり得ない。したがって、ナッシュ均衡配分は$\boldsymbol{y}^*$のみである。□

定理 1 よりただちに以下の系が得られる。

系．Eのナッシュ均衡配分は一意でパレート最適である。

本節の最後に、自発的供給の中立性命題と本稿の結果との関係ついて説明しておく。

Warr(1983)は自発的供給のナッシュ均衡配分が個人の所得分布とは独立に決まる可能性を指摘した。しかし、定理 1(iii)より、この経済のナッシュ均衡配分は資源の分布(e^A, e^B)に依存する。A から B にs単位の資源の移転を行うと、ナッシュ均衡配分は$\left(f_1(e^A), f_2(e^B)\right)$から$\left(f_1(e^A - s), f_2(e^B + s)\right)$に変化する。すなわち、このケースでは中立性命題が成り立たない。一方、定理 1(i)より、$e^B \leq \bar{z}_2^A$のときに B から A へ資源を移転してもナッシュ均衡配分は$\boldsymbol{y}^A$のままである。同様に、定理 1(ii)より、$e^A \leq \bar{z}_1^B$のときに A から B へ資源を移転してもナッシュ均衡配分は$\boldsymbol{y}^B$のままである。すなわち、これらのケースでは中立性命題は成立する[2]。以上より、本稿の設定で中立性命題が成立するのは、資源の分布が一方の個人に偏っているケース（$e^B \leq \bar{z}_2^A$または$e^A \leq \bar{z}_1^B$）に限られることがわかる。

4. ナッシュ交渉解

本節では、2 人のプレイヤーが公共財の配分をめぐって交渉する状況を考える。Nash(1950, 1953)の方法に従って、ナッシュ交渉解として実現する公共財配分を考察する。

まず、Nash(1950)に従って、戦略形ゲームΓから交渉問題$\mathcal{B}$を定式化する。A と B が共同で戦略を選択することによって実行可能な利得ベクトルの集合をVとする。すなわち

$$V = \left\{\left(v^A(\boldsymbol{x}^A, \boldsymbol{x}^B), v^B(\boldsymbol{x}^A, \boldsymbol{x}^B)\right) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ (\boldsymbol{x}^A, \boldsymbol{x}^B) \in X^A \times X^B\right\}.$$

仮定 1 より、Vはコンパクト凸集合である。以下では、Vは不等式$H(v^A, v^B) \leq 0$よって規定され、Vの境界は方程式$H(v^A, v^B) = 0$の解として表されるとする。また

$$U = \left\{\left(u^A(y_1, y_2), u^B(y_1, y_2)\right) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ (y_1, y_2) \in Y\right\}$$

とすると、$V = U$である。交渉の不一致点（disagreement point）を$\boldsymbol{d} = (d^A, d^B) \in V$とする。実行可能集合$V$と不一致点$\boldsymbol{d}$の組$(V, \boldsymbol{d})$を、$\Gamma$から誘導された交渉問題といい、$\mathcal{B}$と表記する。**交渉問題$\boldsymbol{\mathcal{B}}$のナッシュ交渉解（Nash bargaining solution）**とは、V上で利得と不一致点との差の積を最大にする利得ベクトル(v_{NBS}^A, v_{NBS}^B)である。すなわち

$$(v_{NBS}^A, v_{NBS}^B) = \mathrm{argmax}\{(v^A - d^A)(v^B - d^B) \ \mid \ (v^A, v^B) \in V\}.$$

利得と不一致点との差の積$(v^A - d^A)(v^B - d^B)$はナッシュ積（Nash product）とよばれる。

交渉問題$\mathcal{B} = (V, \boldsymbol{d})$において不一致点$\boldsymbol{d}$は「脅し」（threat）の役割を果たし、交渉結果を大きく左右する。そこで、Nash(1953)に従い、プレイヤー自身で$\boldsymbol{d}$の水準を決定する次のような交渉プロセスを考える。

ステージ 1：プレイヤーは戦略$x_0^h \in X^h$を宣言しコミットする。

ステージ 2：Γでの共同戦略の選択をめぐって 2 人で交渉する。合意された場合はその戦略をプレイする。合意に至らなかった場合、ステージ 1 で宣言された(x_0^A, x_0^B)がプレイされる。

[2] これは Bergstrom, Blume, and Varian(1986)によって同定された中立性が成立する所得移転スキームに対応している。

ここで、$\boldsymbol{d_0} = \left(v^A(x_0^A, x_0^B), v^B(x_0^A, x_0^B)\right)$とすると、ステージ 2 は交渉問題$\mathcal{B}_0 = (V, \boldsymbol{d_0})$として定式化される。ステージ 2 では$\mathcal{B}_0$のナッシュ交渉解が実現することを仮定する[3]。ステージ 1 において、プレイヤーたちは、ステージ 2 での交渉で得られる利得ができるだけ大きくなるような戦略を宣言しようとするだろう。Nash(1953)は、ステージ 1 においてどちらのプレイヤーにとっても最適な戦略（mutually optimal strategies）$\hat{x}_0^h$ $(h = A, B)$が存在し、それは以下の式をみたすものとして与えられることを示した[4]。

$$\hat{\lambda}^h \hat{d}^h - \hat{\lambda}^k \hat{d}^k = \max_{x_0^h \in X^h} \min_{x_0^k \in X^k} \left[\hat{\lambda}^h v^h(x_0^A, x_0^B) - \hat{\lambda}^k v^k(x_0^A, x_0^B)\right] \quad (h \neq k)$$

ただし

$$\hat{\lambda}^h = \frac{\partial H}{\partial v^h}(\hat{v}_{NBS}^A, \hat{v}_{NBS}^B) \quad (h = A, B)$$

である。ここで、$\widehat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{0}} = \left(v^A(\hat{x}_0^A, \hat{x}_0^B), v^B(\hat{x}_0^A, \hat{x}_0^B)\right)$として、交渉問題$\widehat{\mathcal{B}}_0 = \left(V, \widehat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{0}}\right)$のナッシュ交渉解$(\hat{v}_{NBS}^A, \hat{v}_{NBS}^B)$を、**戦略形ゲーム$\boldsymbol{\Gamma}$のナッシュ交渉解 (Nash bargaining solution)** という。

$(\hat{v}_{NBS}^A, \hat{v}_{NBS}^B)$を実現する戦略プロファイルを$\hat{\boldsymbol{x}}_{NBS} = (\hat{x}_{NBS}^A, \hat{x}_{NBS}^B)$とし、$\hat{\boldsymbol{x}}_{NBS}$によって実現する公共財配分を$\boldsymbol{y}^{NBS} = (y_1^{NBS}, y_2^{NBS})$とする。自発的供給によるナッシュ均衡配分$\boldsymbol{y}^*$と、2 人の交渉によって合意されるナッシュ交渉解配分$\boldsymbol{y}^{NBS}$とは一般には異なるが、それらが一致するケースがある。それを示したのが以下の定理である。

定理 2　$e^A > \bar{z}_1^B$かつ $e^B > \bar{z}_2^A$であるとする。Eのナッシュ均衡配分$\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$が以下の条件を満たすとき、$\boldsymbol{y}^*$は$\Gamma$のナッシュ交渉解において実現する配分でもある（$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}^{NBS}$）。

$$\lambda^{*A} \frac{\partial u^A}{\partial y_1}(y_1, y_2^*) - \lambda^{*B} \frac{\partial u^B}{\partial y_1}(y_1, y_2^*) \geq 0$$

$$\lambda^{*A} \frac{\partial u^A}{\partial y_2}(y_1^*, y_2) - \lambda^{*B} \frac{\partial u^B}{\partial y_2}(y_1^*, y_2) \leq 0$$

ただし

$$\lambda^{*h} = \frac{\partial H}{\partial v^h}(v^{*A}, v^{*B}) \ , v^{*h} = u^h(y_1^*, y_2^*) \quad (h = A, B)$$

である。

［証明］定理 1(ⅲ)より、$\boldsymbol{y}^* = \left(f_1(e^A), f_2(e^B)\right)$である。定理の条件がみたされるとき、$\lambda^{*A} u^A(y_1, y_2^*) - \lambda^{*B} u^B(y_1, y_2^*)$は$y_1$に関して非減少関数であり、$\lambda^{*A} u^A(y_1^*, y_2) - \lambda^{*B} u^B(y_1^*, y_2)$

---

[3] Nash(1953)では、ナッシュ交渉解がナッシュ均衡利得として実現するような非協力交渉ゲームモデルを提示している。

[4] 証明の詳細は Harsanyi(1963)を参照せよ。

はy_2に関して非増加関数である。したがって、$\lambda^{*A}v^A(x^A,x^B)-\lambda^{*B}v^B(x^A,x^B)$は$x^A=(e^A,0)$のときに最大化、$x^B=(0,e^B)$のとき最小化される。すなわち、$\hat{x}_0^A=(e^A,0)$,$\hat{x}_0^B=(0,e^B)$である。このとき、$\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{0}}=\left(u^A(y_1^*,y_2^*),u^B(y_1^*,y_2^*)\right)$である。系より$\boldsymbol{y}^*$はパレート最適であるから、$(\hat{v}_{NBS}^A,\hat{v}_{NBS}^B)=\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{0}}=\left(u^A(y_1^*,y_2^*),u^B(y_1^*,y_2^*)\right)$である。□

定理 2 の解釈は次のようなものである。定理 2 の条件は、公共財 1 に対する評価（加重限界効用）は A のほうが B よりも高く、逆に、公共財 2 に対する評価（加重限界効用）は B のほうが A よりも高いことを意味している。例えば、$\partial u^A/\partial y_2=\partial u^B/\partial y_1=0$のとき、この条件はみたされる。このように、2 つの公共財に対する個人の選好がはっきり分かれている場合、各個人が独立に決めても交渉により協力して決めても、実現する配分は同じで、各個人がより好むほうの公共財に自身の所有する資源のすべてを拠出することになる。

5. 数値例

本節では、本稿で得られた結果を数値例で確認する。個人の効用関数は

$$u^A(y_1,y_2)=\sqrt{y_1}+y_2\ ,\qquad u^B(y_1,y_2)=\frac{2}{3}\sqrt{y_1}+y_2$$

であるとする（準線形効用）。総資源量は 1 とし（$e^A+e^B=1$）、$e=e^A$とおく（$e^B=1-e$）。公共財の生産関数は同一で

$$f_i(z_i)=z_i\quad(i=1,2)$$

であるとする（線形技術）。

各個人の理想点は$\boldsymbol{y}^A=(1/4,3/4)$, $\boldsymbol{y}^B=(1/9,8/9)$である。命題 1 より、パレート最適な配分の集合は

$$P=\left\{(\alpha,1-\alpha)\in\mathbb{R}_+^2\ \middle|\ \tfrac{1}{9}\le\alpha\le\tfrac{1}{4}\right\}$$

である。$1/9<e<1/4$のとき、定理 1(ⅲ)より、ナッシュ均衡配分は$\boldsymbol{y}^*=(e,1-e)$であり、Pに属する。

Γの実行可能な利得ベクトルの集合は

$$V=\left\{\left(\sqrt{t}+1-t,\frac{2}{3}\sqrt{t}+1-t\right)\ \middle|\ 0\le t\le 1\right\}$$

である。ここで

$$H(v^A,v^B)=9(v^A-v^B)^2-(2v^A-3v^B)-1$$

とおくと、Vの境界は方程式$H(v^A,v^B)=0$の解と一致する。

$e=\frac{25}{144}$とする。このとき、ナッシュ均衡配分$\boldsymbol{y}^*=\left(\frac{25}{144},\frac{119}{144}\right)$における各プレイヤーの利得（ナッシュ均衡利得）は

$$v^{*A} = \sqrt{\frac{25}{144}} + \frac{119}{144} = \frac{179}{144} \quad , \quad v^{*B} = \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{25}{144}} + \frac{119}{144} = \frac{159}{144}$$

であるから

$$\frac{\partial H}{\partial v^A}(v^{*A}, v^{*B}) = \frac{\partial H}{\partial v^B}(v^{*A}, v^{*B}) = \frac{1}{2}$$

となる。ここで

$$\frac{1}{2}u^A(y_1, y_2) - \frac{1}{2}u^B(y_1, y_2) = \frac{1}{5}\sqrt{y_1}$$

より

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u^A}{\partial y_1}(y_1, y_2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u^B}{\partial y_1}(y_1, y_2) = \frac{1}{10\sqrt{y_1}} > 0,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u^A}{\partial y_2}(y_1, y_2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u^B}{\partial y_2}(y_1, y_2) = 0$$

が成り立っている。このとき

$$\frac{1}{2}v^A(x^A, x^B) - \frac{1}{2}v^B(x^A, x^B) = \frac{1}{5}\sqrt{x_1^A + x_1^B}$$

は、$\boldsymbol{x}_1^A$の値が大きいほど大きくなり、$\boldsymbol{x}_1^B$の値が小さいほど小さくなる。つまり、ステージ 1 での最適戦略は

$$\hat{x}_0^A = \left(\frac{25}{144}, 0\right) \ , \hat{x}_0^B = \left(0, \frac{119}{144}\right)$$

となり

$$\widehat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{0}} = \left(\frac{179}{144}, \frac{159}{144}\right)$$

すなわち、ステージ 2 における交渉の不一致点はナッシュ均衡利得と一致する。$\boldsymbol{y}^*$はパレート最適であるから

$$(\hat{v}_{NBS}^A, \hat{v}_{NBS}^B) = \widehat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{0}} = (v^{*A}, v^{*B})$$

が成り立つことになる。

6. 結語

本稿では 2 人 2 財経済という最も簡単な設定で複数公共財の配分について検討した。主要な貢献は以下の 2 つである。

(1) 各個人が各公共財に対する資源拠出量を独立に選択するとき、ナッシュ均衡で実現する公共財配分はパレート最適であることを示した。ただし、どのようなパレート最適配分が実現するかは初期資源分布に依存する。

(2) 2 個人が交渉して共同で公共財配分を決める交渉プロセスを定式化し、交渉の結果として実現する配分が(1)のナッシュ均衡配分と一致するための条件を提示した。

最後に今後の研究課題について述べておく。Kamo(2009)で示されたように、3 種類以上の公共財が存在する場合、ナッシュ均衡配分はパレート最適でない可能性がある。この場合、プレイヤー間で交渉して、よりよい配分を実現するプロセスが重要になる。本稿の分析をより一般的なモデルに拡張するためには、一般的な戦略形ゲームにおける協力解の理論[5]が必要である。

引用文献

Aumann, R., Kurz, M., and Neyman, A. (1983). "Voting for public goods," *Review of Economic Studies* 50.

Aumann, R., Kurz, M., and Neyman, A. (1987). "Power and public goods," *Journal of Economic Theory* 42.

Bergstrom, T., Blume, L., and Varian, H.（1986）. "On the private provision of public goods." *Journal of Public Economics* **42.**

Bilodeau, M. and Slivinski, A.（1997）. "Rival charities." *Journal of Public Economics* **66.**

Harsanyi, J. (1963). "Simplified bargaining model for the n-person cooperative games," *International Economic Review* 4.

Kamo, T. (2009). "Nash equilibrium allocations in a multiple public goods economy." *KSU Discussion paper series* No.2009-3.

Kohlberg, E., and Neyman, A. (2017). "Cooperative strategic games." *Harvard Business School working paper series* No.17-075.

Kohlberg, E. and Neyman, A.（2018）. "Games of threats." *Games and Economics Behavior* **108.**

Kohlberg, E., and Neyman, A. (2019）. "Cooperative strategic games—expanded version." Available at SSRN 3726699.

Nash J. (1950). "The bargaining problem." *Econometrica* 18.

Nash, J. (1951). "Non-cooperative games." *Annals of Mathematics* 54.

Nash, J. (1953). "Two-person cooperative games." *Econometrica* **21.**

Warr, P. G. (1983). "The private provision of a public good is independent of the distribution of income." *Economics Letters* 13.

[5] 戦略形ゲームの協力解についての最近の研究として Kohlberg and Neyman(2017, 2018, 2019)がある。