

「Aではないと仮定すると矛盾が導かれる。よってAである。証明終わり。」

背理法を使った証明を学んだとき、疑問を抱いた人はどのくらいいるでしょうか？

「なんだか、屁理屈みたいだ」「これで本当に“Aである”を証明したことになるのか」

といった疑問です。このような疑問は決しておかしいものではありません。

実は、数学とコンピュータ科学の世界もこの問題に悩まされてきました。

コンピュータの行う計算を数学という基礎から研究されている

小林聡先生にコンピュータが抱える計算の問題についてお聞きしました。

インテリジェントシステム学科

小林 聡 教授



神様の視点が見落とした コンピュータの数学

背理法は神様の 証明方法

数学にとって「具体的な解が分からなくても、解の存在だけを証明する」という背理法は強力な武器です。背理法では「解は存在するか存在しないかのいずれか」であること（「Aまたはnot A」という排中律の一つの形）が前提となりますが、これは解が存在するか否かは人間には分からないけれど神様なら知っているという「神様の視点」を持ち込んだ証明方法とも言えます。

この方法がコンピュータ科学にとって困った事態を引き起こしました。20世紀に入り、「アルゴリズムとは何か」つまり「計算できる範囲とはどこまでか」をはっきりさせる必要が出てきたのがそのきっかけでした。様々な数学者が計算とは何かを示す中、後のコンピュータ科学に大きな影響を与えたのが、イギリスの数学者・チューリング（Alan Mathison Turing, 1912-1954）が考案した「チューリングマシン」でした。

止まらない計算

チューリングマシンは、みなさんが使っている、現代のコンピュータと論理的に等価と見なせる仮定の機械で、あらゆるアルゴリズムを実行することができます。ところが、チューリングマシンには理論的境界があることをチューリング自身が示します。それは、チューリングマシンの計算が止まるか止まらないかを前もって判定するアルゴリズムはない（チューリングマシンの停止問題）というものでした。

現代のコンピュータにも理論的には同じ境界があり、すべてのプログラムについて、止まるか止まらないかを事前に判断することは残念ながらできないのです。

神様の視点に立てば、コンピュータは「止まるか止まらないかのいずれか」です。しかし、実際の計算となると「止まってみてはじめて止まると分かる」というケースがあり、「止まるか止まらないかのいずれか」などというのは気休めにしかありません。1時間計算して止まらなくても、もしか

するとあと10分計算させると止まるかもしれません。同じように、10日止まらなかったものが11日目には止まるかもしれず、1年間止まらなかったものも1年と1日目に止まるかもしれないからです。

「プログラムが停止するなら1を、停止しないなら0を答えよ」という問題を考えます。神様の立場では（つまり排中律を使えば）この問題には解があり、それは1か0かに決まっています。しかし、どちらなのかは一般に求められません。このように、神様の立場では解の存在は分かるけれども解を求める方法はない、ということが起こります。しかもこれは一例にすぎず、20世紀以降の数学にはそのような例が山のようにあります。

コンピュータが 間違えたっていいじゃないか

このような状況はコンピュータ科学の立場からは不満です。なぜなら、排中律や背理法の使用を避けなければならないからです。排中律や背理法を避け、解の存在が証明できたらその計算方法も必ず分かるような形で数学を展開してみよう、という考え方で展開される数学は「構成的数学」と呼ばれ、私の研究テーマの一つです。19世紀までの数学は基本的に構成的数学で展開でき、それ以降の定理についても、証明をやり直したり、定理の記述を修正することで排中律を避けることは案外うまく行きます。

しかし、排中律や背理法の一般形を使った途端、我々は「プログラムが止まらず、計算結果を出せない」という問題に直面します。排中律の使用はあきらめなければならないのでしょうか？

私は現在、この問題にも取り組んでいて、非常に弱いバージョンの排中律を認める代わりに「コンピュータが間違える」ことも許す、というモデルを考えています。このモデルでは「最初のうちは間違えても良いからとりあえず答えを出す」ことが許されます。しかし、間違いを放っておくわけではなく、プログラムは一種の学習を続け、他の解を出します。それも間違っていたらまた別の解を出す、とくり返し、学習を続けるうちにいつかは正しい解を出します。それがいつになるかは一

般に保証できないのですが、誤りが適切に指摘される限り、いつかは学習が成功して正しい答を出すことがある意味で保証されています。数学的には「極限計算可能数学」と呼ばれる考え方です。

人間の脳は優れた創造力を持つ一方で、よく間違えます。コンピュータにも間違いを許容することで新たな計算への可能性が開けてくるかもしれません。

排中律を批判した数学者

排中律の無制限の使用に反対した数学者として有名なのがオランダのブラウワー（Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881-1966）です。彼は、排中律への批判として「円周率に0が100個並ぶ場所がないかどうかどうやって分かるのか」という例を挙げました。円周率は終わりがなく数字が並ぶ無理数です。計算を続けていけばもしかしたらいずれ0が100個並ぶ場所が出てくるかもしれません。でも、それは今のところ誰にも分かりません。確かめるためには計算を延々と続けなければなりません、出てこなければいつまでも計算が終わらず、まさに停止しない計算になってしまいます。

このような考え方から、ブラウワーは「排中律を無条件に使うべきではない」と主張しました。この主張は当時論議を呼びましたが、ブラウワーの思想は今日の構成的数学を生み、コンピュータ科学へ大いに寄与しました。