むすんで、うみだす。

京都産業大学

×

河合塾

京都産業大学
一般選抜入試対策講座
（理系数学）

河合塾　数学科講師　山下 紀子

〔 I 〕 以下の $\boxed{}$ にあてはまる式または数値を，解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 整式 x^3+2x^2+3x-7 を整式 $P(x)$ で割ると，商が $x-1$，余りが $4x-5$ である。このような $P(x)$ を求めると $\boxed{}$ である。

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$ のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値は $\boxed{}$ である。

(3)　大中小 3 個のさいころを同時に投げて，出る 3 つの目の和が 10 となる確率は $\boxed{}$ である。

(4)　i を虚数単位とする。複素数平面上の点 $\sqrt{3}+i$ を原点 O を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ反時計回りに回転した点を表す複素数は $\boxed{}$ である。

(5)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \left|e^x - \sqrt{e}\right| dx$ の値を求めると $\boxed{}$ である。ただし，e は自然対数の底とする。

I (1)

$$x^3+2x^2+3x-7=(x-1)P(x)+4x-5.$$

$$(x-1)P(x)=x^3+2x^2-x-2.$$

$$P(x)=x^2+3x+2.$$

(2)

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2.$$

$$19=9+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+9.$$

$$2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1.$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2&=|\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2\\&=9-1+9\\&=17.\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{17}.$$

(3) 3 個のさいころの目の出方は 6^3 通り.

このうち, 出る 3 つの目の和が 10 となる目の組み合わせは,

$$(6,3,1)$$
$$(6,2,2)$$
$$(5,4,1)$$
$$(5,3,2)$$
$$(4,4,2)$$
$$(4,3,3)$$

各々の場合の数を数えて足すことにより，求める確率は，

$$\frac{6+3+6+6+3+3}{6^3}=\frac{1}{8}.$$

(4) $\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ であるから，

これを原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ反時計回りに回転させた複素数は $2i$.

(5)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |e^x - \sqrt{e}|\,dx &= -\int_0^{\frac{1}{2}} (e^x - \sqrt{e})\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^x - \sqrt{e})\,dx \\
&= -[e^x - \sqrt{e}x]_0^{\frac{1}{2}} + [e^x - \sqrt{e}x]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= e - 2\sqrt{e} + 1.
\end{aligned}
$$

〔 II 〕 以下の $\boxed{}$ にあてはまる式または数値を，解答用紙の所定の欄に記入せよ。

N を 2 以上の整数とし， 整数 n を

$$n = a_N 2^N + a_{N-1} 2^{N-1} + a_{N-2} 2^{N-2} + \cdots + a_0 2^0 = \sum_{i=0}^{N} a_i 2^i \qquad (a_i = 0 \text{ または } 1)$$

により定める。このような n に対し，

$$f(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i$$

とおく。また，1 以上の整数 n に対して 0 以上の整数 $g(n)$ を，条件

$$n = 2^{g(n)} m \qquad (m \text{ は奇数})$$

により定める。

(1)　$N = 5$ の場合を考える。このとき，$f(40) = \boxed{\text{（ア）}}$ であり，$g(40) = \boxed{\text{（イ）}}$ である。$g(n) = 3$ となる n は $\boxed{\text{（ウ）}}$ 個ある。

以下，$N \geqq 2$ とする。

(2)　$f(n) = 2$ となる最小の n は $n = \boxed{\text{（エ）}}$ である。$f(n) = 2$ となる最大の n を N の式で表すと，$n = \boxed{\text{（オ）}}$ である。

(3)　k を $1 \leqq k \leqq N+1$ であるような整数とする。$f(n)=k$ のとき，$g(n)$ の最大値は $\boxed{\text{（カ）}}$ である。

(4)　$g(n)=2$ となるような n をすべて考えたとき，それらの和を N の式で表すと $\boxed{\text{（キ）}}$ である。

II

(1) $40 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3$ より,

$$f(40) = 2.$$

また, $40 = 2^3 \cdot 5$ より,

$$g(40) = 3.$$

$N = 5$ のとき $0 \leq n \leq 63$ であり, そのうち $n = 2^3 \times$ (奇数) と表せるものは

$$n = 8 \cdot 1,\ 8 \cdot 3,\ 8 \cdot 5,\ 8 \cdot 7$$

の 4 個ある.

(2) $f(n)=2$ となる最小の n は

$$n=1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=3.$$

$f(n)=2$ となる最大の n は

$$n=1\cdot 2^N+1\cdot 2^{N-1}=2^N+2^{N-1}.$$

(3) $f(n) = k\ (1 \leqq k \leqq N+1)$ のとき, $g(n)$ が最大となる n は

$$n = 1 \cdot 2^{N} + 1 \cdot 2^{N-1} + \cdots 1 \cdot 2^{N-k+1}$$

であり, そのとき

$$g(n) = N - k + 1.$$

(4) $g(n)=2$ となる n は $a_0=a_1=0,\ a_2=1$ を満たす.

. そのような n は, 2^{N-2} 個あり, その和は

$$
\begin{aligned}
2^3\cdot(0\text{ から }2^{N-2}-1\text{ までの和})+2^2\cdot 2^{N-2} &= 2^3\cdot\frac{1}{2}(2^{N-2}-1)\cdot 2^{N-2}+2^N \\
&= 2^N(2^{N-2}-1)+2^N \\
&= 2^{2N-2}.
\end{aligned}
$$

〔III〕 xy 平面上の曲線

$$C: y = 3 + \sin x \qquad (0 < x < \pi)$$

を考える。C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 3+\sin t)$ における法線とは，P を通り，P における C の接線と垂直な直線である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) x 軸上の点 $\mathrm{A}(a, 0)$ を考える。直線 AP が C の P における法線であるとき，$a = f(t)$ と書けるような関数 $f(t)$ を求めよ。

(2)　(1) のとき $f'(t)$ を求めよ。また，$f'(t)=0$ となる t の値を求めよ。

(3)　(1) のとき A から C へ異なる 2 本の法線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

III

(1) $y=3+\sin x$ より，

$$y'=\cos x.$$

これより P における接線の方向ベクトルとして $(1,\cos t)(=\vec{v}$ とする) がとれる．

直線 AP が C の P における法線であるとき，$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0.$$

$$(1,\cos t)\cdot(t-a,3+\sin t)=0.$$

$$(t-a)+\cos t(3+\sin t)=0.$$

$$a=t+3\cos t+\sin t\cos t.$$

したがって，

$$f(t)=t+3\cos t+\sin t\cos t.$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 - 3\sin t + \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= -2\sin^2 t - 3\sin t + 2 \\ &= -(2\sin t - 1)(\sin t + 2). \end{aligned}$$

$0 < t < \pi$ より $0 < \sin t \leqq 1$ であるから，$f'(t) = 0$ となるとき，

$$\sin t = \frac{1}{2}.$$

$0 < t < \pi$ より，

$$t = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi.$$

(3) A から C への異なる法線の本数は $a=f(t)$ の異なる実数解の個数と一致し，これは $y=f(t)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数と一致する．

$0<t<\pi$ における $f(t)$ の増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{6})$	$\searrow$	$f(\frac{5}{6}\pi)$	$\nearrow$	

$$\lim_{t\to+0} f(t)=3,$$
$$\lim_{t\to\pi-0} f(t)=\pi-3,$$

$$f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\frac{7\sqrt{3}}{4},$$
$$f(\frac{5}{6}\pi)=\frac{5}{6}\pi-\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

以上より，求める a の値の範囲は，

$$3 < a < \frac{\pi}{6} + \frac{7\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{5}{6}\pi - \frac{7\sqrt{3}}{4} < a < \pi - 3.$$