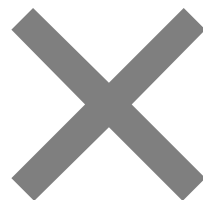




むすんで、うみだす。

京都産業大学



河合塾

京都産業大学

一般選抜入試対策講座

文系数学

河合塾

数学科講師

上村 高史

〔Ⅰ〕

(1) $2x^2 - 3y^2 - xy + 10y - 8$ を因数分解すると ア である。

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 3y^2 - xy + 10y - 8 \\ &= 2x^2 - yx - (3y - 4)(y - 2) \\ &= (2x - 3y + 4)(x + y - 2). \end{aligned}$$

(2) a を実数とする。 xy 平面において、放物線 $y = x^2 - x + 2$ と直線 $y = 2x + a$ が接するとき、 $a =$ であり、そのときの接点の座標は である。

$y = x^2 - x + 2$ と $y = 2x + a$ から y を消去して、

$$x^2 - x + 2 = 2x + a.$$

$$x^2 - 3x + 2 - a = 0. \quad \dots \textcircled{1}$$

この判別式を D とすると、 $D = 0$.

$$D = (-3)^2 - 4(2 - a) = 4a + 1$$

より、

$$4a + 1 = 0.$$

(2) a を実数とする。 xy 平面において、放物線 $y = x^2 - x + 2$ と直線 $y = 2x + a$ が接するとき、 $a =$ であり、そのときの接点の座標は である。

$$a = -\frac{1}{4}.$$

また、このとき、①は、

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0.$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

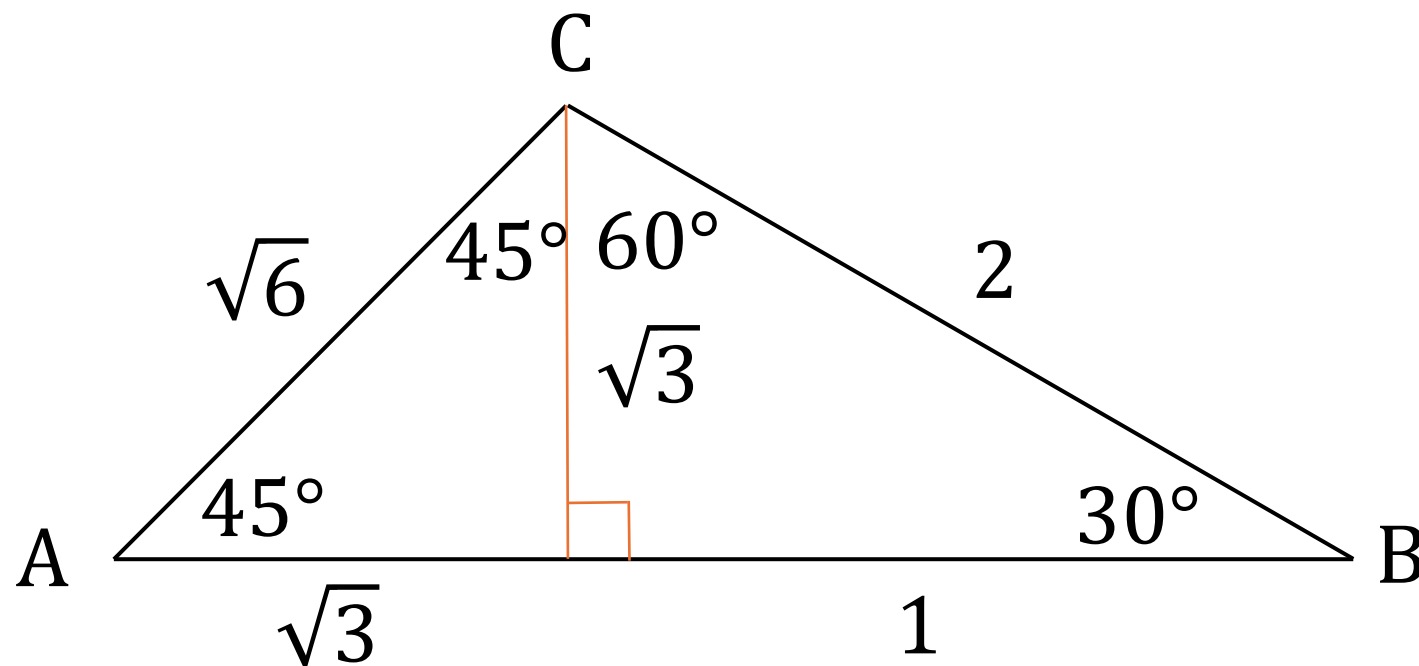
(2) a を実数とする。 xy 平面において、放物線 $y = x^2 - x + 2$ と直線 $y = 2x + a$ が接するとき、 $a =$ であり、そのときの接点の座標は である。

$$x = \frac{3}{2}.$$

よって、接点の座標は、

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right).$$

(3) $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $BC = 2$ であるような三角形 ABC の AB の長さは で、三角形 ABC の面積は である。



(3) $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $BC = 2$ であるような三角形 ABC の AB の長さは で、三角形 ABC の面積は である。

前ページの図より、

$$AB = 1 + \sqrt{3}.$$

また、

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

(4) $0 \leq \theta < 2\pi$ であるとき、不等式 $2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \sin \theta \geq 1$ を満たす θ の値の範囲は 力 である。

$$2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \sin \theta \geq 1$$

より,

$$2 \left(\cos \theta \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \theta \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) - 2 \sin \theta \geq 1.$$

$$\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \geq 1.$$

$$2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \leq -1.$$

$$\sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \leq -\frac{1}{2}.$$

(4) $0 \leq \theta < 2\pi$ であるとき、不等式 $2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \sin \theta \geq 1$ を満たす θ

の値の範囲は 力 である。

ここで、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3}.$$

よって、

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

すなわち、

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi.$$

(5) x と y を実数とする。2つのベクトル $\vec{a} = (x, 1, 3)$ と $\vec{b} = (-4, 2, y)$ において、 $\vec{a} + \vec{b}$ と $3\vec{a} - \vec{b}$ が平行であるとき、 $x = \boxed{\text{キ}}$, $y = \boxed{\text{ク}}$ である。

$$\vec{a} + \vec{b} = (x - 4, 3, y + 3),$$

$$3\vec{a} - \vec{b} = (3x + 4, 1, -y + 9).$$

$\vec{a} + \vec{b}$ と $3\vec{a} - \vec{b}$ が平行であるとき、実数 k を用いて、

$$\begin{cases} x - 4 = k(3x + 4), \\ 3 = k, \\ y + 3 = k(-y + 9). \end{cases}$$

これを解いて、

$$k = 3, \quad x = -2, \quad y = 6.$$

(6) 関数 $y = \log_3(3x - 1) + 2\log_9(1 - x)$ は $x =$ のとき最大値 をとる。

真数条件より,

$$3x - 1 > 0, \quad 1 - x > 0$$

すなわち,

$$\frac{1}{3} < x < 1. \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき,

$$\begin{aligned} y &= \log_3(3x - 1) + 2\log_9(1 - x) \\ &= \log_3(3x - 1) + 2 \frac{\log_3(1 - x)}{\log_3 9} \\ &= \log_3(3x - 1)(1 - x) \end{aligned}$$

(6) 関数 $y = \log_3(3x - 1) + 2\log_9(1 - x)$ は $x =$ のとき最大値 をとる。

$$\begin{aligned} &= \log_3(-3x^2 + 4x - 1) \\ &= \log_3 \left\{ -3 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \right\} \end{aligned}$$

よって、①より、

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき, } y \text{ は最大値 } \log_3 \frac{1}{3} = -\mathbf{1}.$$

〔Ⅱ〕 以下の にあてはまる式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた欄に記入せよ。

四面体 ABCD の頂点間を移動する点 P がある。P は 1 秒ごとに他の 3 つの頂点に等しい確率で動くが、確率 $\frac{1}{10}$ で動かずに同じ頂点にとどまる。最初 P は A にあるとする。

(i) 動き始めてから 1 秒後に P が B にいる確率は ア , 2 秒後に P が A にいる確率は イ , 3 秒後に P が A にいる確率は ウ である。

(ii) t を正の整数とする。動き始めてから t 秒後に P が A にいる確率を p_t とする。 p_{t+1} を p_t を用いて表すと、 $p_{t+1} =$ エ である。数列 $\{p_t\}$ の一般項は オ である。

(i) 動き始めてから1秒後にPがBにいる確率は , 2秒後にPがAにいる確率は , 3秒後にPがAにいる確率は である。

1秒で、AからBに移動する確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{3}{10}.$$

また、2秒後に点PがAにいる確率を、 $A \rightarrow A$, $B \rightarrow A$, $C \rightarrow A$, $D \rightarrow A$ に移動する場合に分けて考えて、

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{25}.$$

(i) 動き始めてから1秒後にPがBにいる確率は , 2秒後にPがAにいる確率は , 3秒後にPがAにいる確率は である。

さらに、3秒後に点PがAにいる確率を、2秒後に点PがAにいる場合と、2秒後に点PがA以外にいる場合に分けて考えて、

$$\frac{7}{25} \cdot \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{7}{25}\right) \cdot \frac{3}{10} = \frac{61}{250}.$$

(ii) t を正の整数とする。動き始めてから t 秒後に P が A にいる確率を p_t とする。 p_{t+1} を p_t を用いて表すと、 $p_{t+1} = \boxed{\text{エ}}$ である。数列 $\{p_t\}$ の一般項は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(i) と同様に、 $t + 1$ 秒後に点 P が A にいる確率を、 t 秒後に点 P が A にいる場合と、 t 秒後に点 P が A 以外にいる場合に分けて考えて、

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_t \cdot \frac{1}{10} + (1 - p_t) \cdot \frac{3}{10} \\ &= -\frac{1}{5}p_t + \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

(ii) t を正の整数とする。動き始めてから t 秒後に P が A にいる確率を p_t とする。 p_{t+1} を p_t を用いて表すと、 $p_{t+1} = \boxed{\text{エ}}$ である。数列 $\{p_t\}$ の一般項は $\boxed{\text{オ}}$ である。

したがって、

$$p_{t+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{5} \left(p_t - \frac{1}{4} \right).$$

ここで、 $p_1 = \frac{1}{10}$ より、

$$p_t - \frac{1}{4} = \left(p_1 - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(-\frac{1}{5} \right)^{t-1} = -\frac{3}{20} \cdot \left(-\frac{1}{5} \right)^{t-1}.$$

(ii) t を正の整数とする。動き始めてから t 秒後に P が A にいる確率を p_t とする。 p_{t+1} を p_t を用いて表すと、 $p_{t+1} = \boxed{\text{エ}}$ である。数列 $\{p_t\}$ の一般項は $\boxed{\text{オ}}$ である。

よって、

$$p_t = -\frac{3}{20} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{t-1} + \frac{1}{4}.$$

〔Ⅲ〕 以下の にあてはまる式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた欄に記入せよ。また、(iv)の問いについて、記述欄に過程も含めて解答せよ。

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 9$ が $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$ を満たしている。
 xy 平面における $y = f(x)$ のグラフを C とし、 C 上の点 $P(2, f(2))$ における C の接線を $\ell: y = px + q$ とする。ただし、 a , b , および p , q は実数とする。

(i) $a =$ ア , $b =$ イ である。

(ii) C と x 軸との交点の x 座標のうち、 $x = 3$ と異なるものは $x =$ ウ
である。 $f(x)$ は $x =$ エ で極大となる。

(iii) $p =$ オ , $q =$ カ である。 ℓ と C との交点のうち、 P と異なる点の座標は キ である。

(i) $a = \boxed{-7}$, $b = \boxed{15}$ である。

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 9 \text{ より,}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

$$f(3) = 0, \quad f'(3) = 0 \text{ より,}$$

$$\begin{cases} 27 + 9a + 3b - 9 = 0, \\ 27 + 6a + b = 0. \end{cases}$$

よって,

$$a = -7, \quad b = 15.$$

(ii) C と x 軸との交点の x 座標のうち, $x = 3$ と異なるものは $x =$

である。 $f(x)$ は $x =$ で極大となる。

$a = -7$, $b = 15$ より,

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x - 3)^2(x - 1),$$

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 15 = (x - 3)(3x - 5).$$

したがって, C と x 軸との交点の x 座標のうち, $x = 3$ と異なるものは,

$$x = \mathbf{1}.$$

(ii) C と x 軸との交点の x 座標のうち, $x = 3$ と異なるものは $x =$ ウ
 である。 $f(x)$ は $x =$ エ で極大となる。

また, $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	...	$\frac{5}{3}$	...	3	...
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって, $f(x)$ は $x = \frac{5}{3}$ で極大となる。

(iii) $p = \boxed{\text{オ}}$, $q = \boxed{\text{カ}}$ である。 ℓ と C との交点のうち、 P と異なる点の座標は $\boxed{\text{キ}}$ である。

$$f(2) = 1, \quad f'(2) = -1 \text{ より,}$$

$$l: y = -(x - 2) + 1 = -x + 3.$$

よって,

$$p = -1, \quad q = 3.$$

(iii) $p = \boxed{\text{才}}$, $q = \boxed{\text{力}}$ である。 l と C との交点のうち、 P と異なる点の座標は $\boxed{\text{キ}}$ である。

次に、 l と C の式から y を消去して、

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = -x + 3.$$

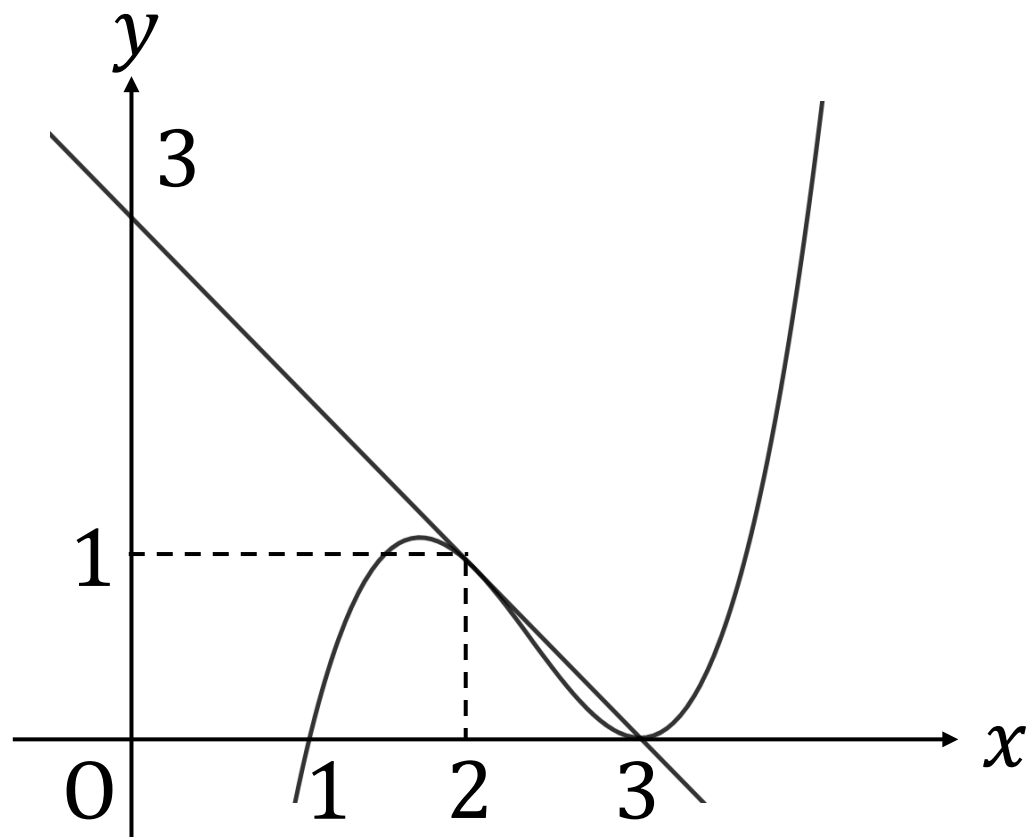
$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0.$$

$$(x - 2)^2(x - 3) = 0.$$

よって、 l と C の交点のうち、 P と異なる点の座標は、
(3, 0).

(iv) 以下の連立不等式で表される領域を図示し、その面積を求めよ。

$$\begin{cases} y \geq f(x) \\ y \leq px + q \\ 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



左図より，求める面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 3) \cdot 2 - \int_1^2 f(x) dx \\ &= 4 - \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{7}{3} x^3 + \frac{15}{2} x^2 - 9x \right]_1^2 \\ &= \frac{37}{12}. \end{aligned}$$