京都産業大学
公募推薦入試対策講座
（理系数学）

河合塾

山下　紀子先生

〔II〕　関数 $f(x)=x^3-8x^2+16x$ を考える。

xy 平面において, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の座標は

$\left(\boxed{ア},\boxed{イ}\right)$, $\left(\boxed{ウ},\boxed{エ}\right)$ である。ただし, $\boxed{ア}<\boxed{ウ}$

とする。

関数 $f(x)$ は $x=\boxed{オ}$ のとき極小値 $\boxed{カ}$ をとり,

$x=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき極大値 $\dfrac{\boxed{ケコサ}}{\boxed{シス}}$ をとる。

曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$ である。

a を実数とする。$f(a+1)=f(a+3)$ であるならば,

$a=\dfrac{\boxed{チ}\pm\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}$ である。

$a=\dfrac{\boxed{チ}-\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}$ のとき, $a+1<\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}<a+3<\boxed{オ}$ である。

関数 $f(x)$ が $a+1\leqq x\leqq a+3$ の範囲で $x=a+3$ のとき最大値をとる

ような a の値の範囲は

$$a\leqq\frac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}\quad \text{または} \quad \frac{\boxed{チ}+\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}\leqq a \quad \text{である。}$$

関数 $f(x)$ が $a+1\leqq x\leqq a+3$ の範囲で $x=a+1$ のとき最小値をとる

ような a の値の範囲は

$$a\leqq\frac{\boxed{チ}-\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}\quad \text{または} \quad \boxed{ネ}\leqq a \quad \text{である。}$$

関数 $f(x)$ が $a+1\leqq x\leqq a+3$ の範囲で $x=a+1$ のとき最大値をとる

ような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\leqq a\leqq\frac{\boxed{チ}+\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}} \quad \text{である。}$$

関数 $f(x)=x^3-8x^2+16x$ を考える。

xy 平面において, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の座標は

$\left(\boxed{ア}, \boxed{イ}\right), \left(\boxed{ウ}, \boxed{エ}\right)$ である。ただし, $\boxed{ア} < \boxed{ウ}$

とする。

関数 $f(x)$ は $x=\boxed{オ}$ のとき極小値 $\boxed{カ}$ をとり,

$x=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき極大値 $\dfrac{\boxed{ケコサ}}{\boxed{シス}}$ をとる。

$$f(x)=x(x-4)^2.$$

$y=f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標は $f(x)=0$ の実数解であるから,

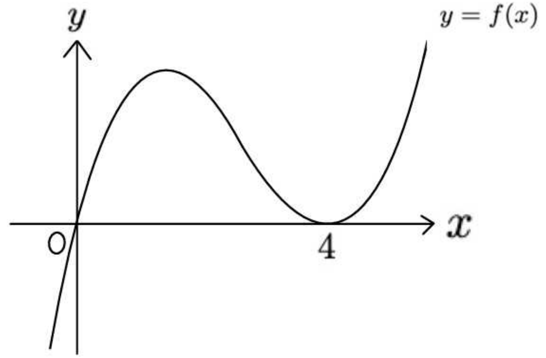
$$x=0,\ 4.$$

よって, x 軸との共有点の座標は

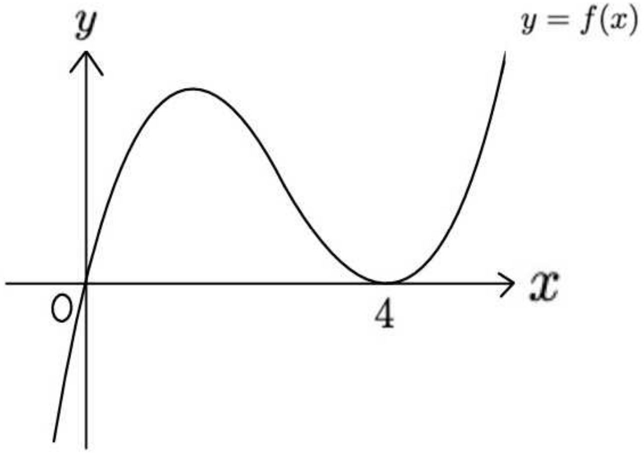
$$(0,\ 0),\quad (4,\ 0).$$

$$f'(x)=3x^2-16x+16=(x-4)(3x-4).$$

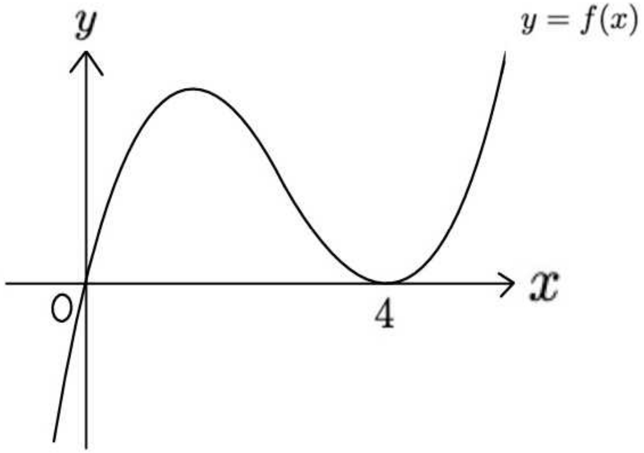
$f(x)$ は $x=4$ のとき極小値 $f(4)=0$, $x=\dfrac{4}{3}$ のとき極大値 $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{256}{27}$ をとる.



曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$ である。



曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$ である。



$y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)dx &= \int_0^4 x(x-4)^2 dx \\
&= \int_0^4 \{(x-4)+4\}(x-4)^2 dx \\
&= \int_0^4 \{(x-4)^3 + 4(x-4)^2\} dx \\
&= \left[\frac{1}{4}(x-4)^4 + \frac{4}{3}(x-4)^3\right]_0^4 \\
&= -\left(\frac{1}{4}\cdot 4^4 - \frac{4}{3}\cdot 4^3\right) \\
&= \frac{64}{3}.
\end{aligned}
$$

a を実数とする。$f(a+1)=f(a+3)$ であるならば，
$a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

$$f(a+1)=f(a+3).$$
$$f(a+3)-f(a+1)=0.$$

ここで，

$$\begin{aligned}
&f(a+3)-f(a+1)\\
=&\{(a+3)^3-(a+1)^3\}-8\{(a+3)^2-(a+1)^2\}+16\{(a+3)-(a+1)\}\\
=&(6a^2+24a+26)-8(4a+8)+16\cdot 2\\
=&6a^2-8a-6
\end{aligned}$$

であるから，

$$6a^2-8a-6=0.$$
$$3a^2-4a-3=0.$$

これを解いて，

$$a=\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}.$$

$a=\dfrac{\boxed{チ}-\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}$ のとき, $a+1<\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}<a+3<\boxed{オ}$ である。

関数 $f(x)$ が $a+1\leqq x\leqq a+3$ の範囲で $x=a+3$ のとき最大値をとるような a の値の範囲は

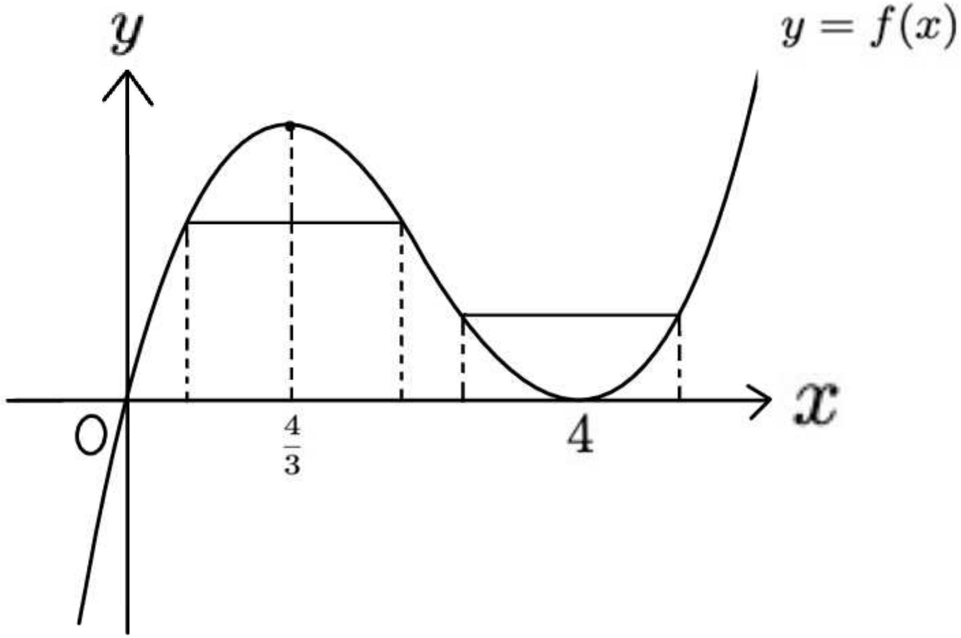
$$a\leqq\frac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}\quad\text{または}\quad\frac{\boxed{チ}+\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}\leqq a$$ である。

関数 $f(x)$ が $a+1\leqq x\leqq a+3$ の範囲で $x=a+1$ のとき最小値をとるような a の値の範囲は

$$a\leqq\frac{\boxed{チ}-\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}\quad\text{または}\quad\boxed{ネ}\leqq a$$ である。

関数 $f(x)$ が $a+1\leqq x\leqq a+3$ の範囲で $x=a+1$ のとき最大値をとるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\leqq a\leqq\frac{\boxed{チ}+\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}$$ である。



〔Ⅲ〕　空間内の点 O, A, B, C, D から作られる, 平行四辺形 OABC, 正三角形 OAD を考える。

OA $= 5$, OC $= 4$, $\angle$AOC $= 120°$, $\angle$COD $= 90°$ であるとし,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とおく。

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{アイウ}}$, $\vec{a} \cdot \vec{d} = \dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

$\angle$BAD $= \boxed{\text{キク}}$ °である。

点 O から平面 ABD に垂線を下ろし, 垂線と平面 ABD の交点を P とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}\vec{c} + \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\vec{d} \quad \text{である。}$$

Q は直線 OP 上の点であり, R は直線 AQ と直線 CD の交点であるとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}\vec{c} + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}\vec{d},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\vec{c} + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\vec{d}$$

である。

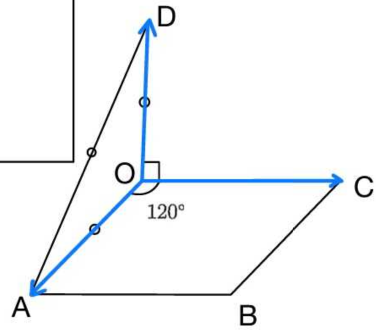
〔Ⅲ〕　空間内の点 O, A, B, C, D から作られる，平行四辺形 OABC, 正三角形 OAD を考える。

OA $= 5$, OC $= 4$, $\angle$AOC $= 120°$, $\angle$COD $= 90°$ であるとし，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とおく。

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{アイウ}}$, $\vec{a} \cdot \vec{d} = \dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

$\angle$BAD $= \boxed{\text{キク}}$ °である。



条件より，$|\vec{a}| = |\vec{d}| = 5$, $|\vec{c}| = 4$.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 5 \cdot 4 \cos 120° = -10,$$
$$\vec{a} \cdot \vec{d} = 5 \cdot 5 \cos 60° = \frac{25}{2},$$
$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 0.$$

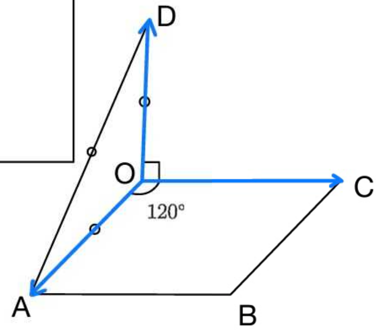
〔Ⅲ〕　空間内の点 O, A, B, C, D から作られる, 平行四辺形 OABC, 正三角形 OAD を考える。

$\mathrm{OA}=5$, $\mathrm{OC}=4$, $\angle\mathrm{AOC}=120^\circ$, $\angle\mathrm{COD}=90^\circ$ であるとし,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{アイウ}}$, $\vec{a}\cdot\vec{d}=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

$\angle\mathrm{BAD}=\boxed{\text{キク}}\,^\circ$ である。



条件より, $|\vec{a}|=|\vec{d}|=5$, $|\vec{c}|=4$.

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{c}&=5\cdot4\cos120^\circ=-10,\\
\vec{a}\cdot\vec{d}&=5\cdot5\cos60^\circ=\frac{25}{2},\\
\vec{c}\cdot\vec{d}&=0.
\end{aligned}$$

AB= 4, AD= 5 より,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\cos\angle\mathrm{BAD}\\
&=20\cos\angle\mathrm{BAD}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\vec{c}\cdot\left(\vec{d}-\vec{a}\right)\\
&=\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\
&=10
\end{aligned}$$

であるから

$$\cos\angle\mathrm{BAD}=\frac{1}{2}.$$

$0^\circ<\angle\mathrm{BAD}<180^\circ$ より,

$$\angle\mathrm{BAD}=60^\circ.$$

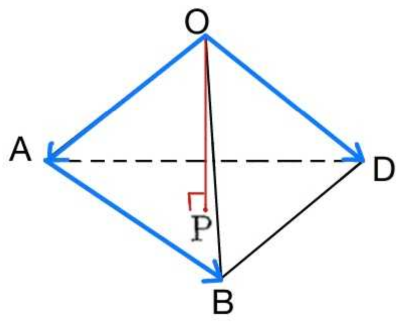
点Oから平面ABDに垂線を下ろし, 垂線と平面ABDの交点をPとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{a} + \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}\vec{c} + \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\vec{d}$$ である。

$|\vec{a}| = |\vec{d}| = 5,\ |\vec{c}| = 4$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = -10, \vec{a}\cdot\vec{d} = \dfrac{25}{2}, \vec{c}\cdot\vec{d} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{c}$



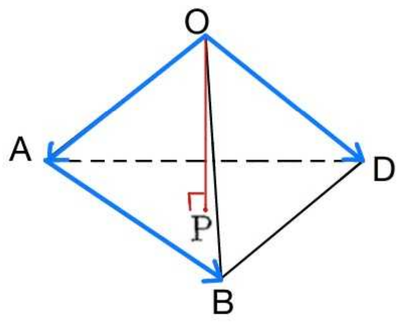
点Oから平面ABDに垂線を下ろし，垂線と平面ABDの交点をPとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{a} + \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}\vec{c} + \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\vec{d}$$ である。

$|\vec{a}| = |\vec{d}| = 5,\ |\vec{c}| = 4$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = -10, \vec{a} \cdot \vec{d} = \frac{25}{2}, \vec{c} \cdot \vec{d} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{c}$



Pが平面ABDにあるので，s, tを実数として，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= (1-t)\vec{a} + s\vec{c} + t\vec{d}\end{aligned}$$

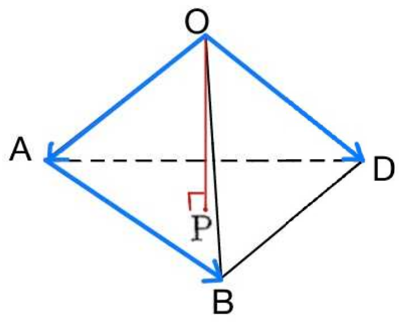
点Oから平面ABDに垂線を下ろし, 垂線と平面ABDの交点をPとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{a} + \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}\overrightarrow{c} + \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\overrightarrow{d} \quad である。$$

$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{d}| = 5,\ |\overrightarrow{c}| = 4$

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = -10,\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d} = \dfrac{25}{2},\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{c}$



Pが平面ABDにあるので, s, t を実数として,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= (1-t)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{c} + t\overrightarrow{d}\end{aligned}$$

と表せる. また OP $\perp$ (平面ABD) より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad かつ \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AD}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \quad かつ \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left\{(1-t)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{c} + t\overrightarrow{d}\right\}\cdot\overrightarrow{c}\\ &= (1-t)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} + s\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c} + t\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{c}\\ &= (1-t)\cdot(-10) + s\cdot 16 + 0\\ &= 16s + 10t - 10,\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \left\{(1-t)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{c} + t\overrightarrow{d}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{d} - \overrightarrow{a}\right)\\ &= (1-t)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d} + s\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d} + t\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{d} - \left\{(1-t)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}\right\}\\ &= (1-t)\frac{25}{2} + 0 + t\cdot 25 - \left\{(1-t)\cdot 25 + s\cdot(-10) + t\cdot\frac{25}{2}\right\}\\ &= 10s + 25t - \frac{25}{2}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases}16s + 10t - 10 = 0,\\ 10s + 25t - \dfrac{25}{2} = 0.\end{cases}$$

これを解いて,

$$s = \frac{5}{12},\ t = \frac{1}{3}.$$

よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{5}{12}\overrightarrow{c} + \frac{1}{3}\overrightarrow{d}.$$

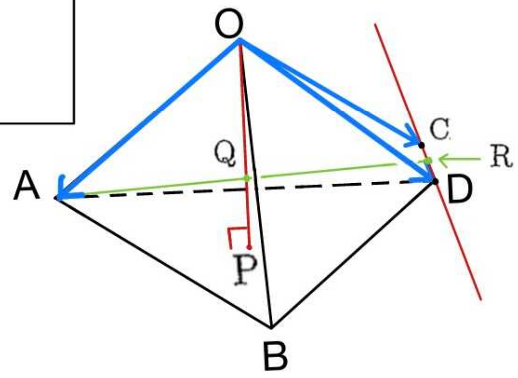
Q は直線 OP 上の点であり, R は直線 AQ と直線 CD の交点であるとする。

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}\vec{a} + \frac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}\vec{c} + \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌネ}}\vec{d},$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\vec{c} + \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}\vec{d}$$

である。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}.$$



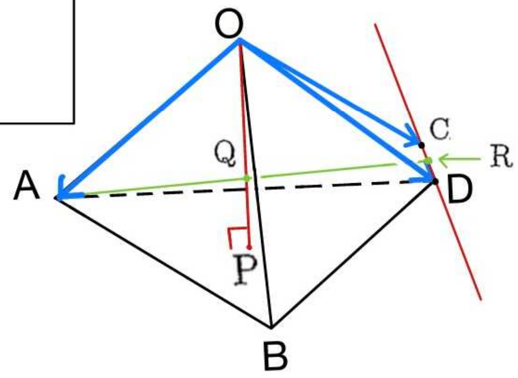
Q は直線 OP 上の点であるから, k を実数として,

Q は直線 OP 上の点であり，R は直線 AQ と直線 CD の交点であるとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}\vec{a} + \frac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}\vec{c} + \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌネ}}\vec{d},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\vec{c} + \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}\vec{d}$$

である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}.$$



Q は直線 OP 上の点であるから,k を実数として,

Q は直線 OP 上の点であるから,k を実数として,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= \frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{5}{12}k\vec{c} + \frac{1}{3}k\vec{d}\end{aligned}$$

と表せる． また, R は直線 AQ 上の点であるから, l を実数として,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\ &= (1-l)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= (1-l)\vec{a} + l\left\{\frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{5}{12}k\vec{c} + \frac{1}{3}k\vec{d}\right\}\\ &= \left(1 - l + \frac{2}{3}kl\right)\vec{a} + \frac{5}{12}kl\vec{c} + \frac{1}{3}kl\vec{d}\end{aligned}$$

と表せる.$\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ は一次独立であり,R は直線 CD 上にあるから,

$$\begin{cases}1 - l + \frac{2}{3}kl = 0,\\ \frac{5}{12}kl + \frac{1}{3}kl = 1.\end{cases}$$

これを解いて,

$$k = \frac{12}{17},\ l = \frac{17}{9}.$$

以上より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{8}{17}\vec{a} + \frac{5}{17}\vec{c} + \frac{4}{17}\vec{d},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{5}{9}\vec{c} + \frac{4}{9}\vec{d}.$$