博 士 学 位 論 文

内容の要旨及び審査の結果の要旨

第12号

1995年 3 月

京 都 産 業 大 学

は し が き

本号は，学位規則（昭和28年４月１日文部省令第９号）第８条の規定による公表を目的とし，平成７年３月20日に本学において博士の学位を授与した者の論文内容の要旨及び論文審査の結果の要旨を収録したものである。

学位記番号に付した甲は、学位規則第４条第１項（いわゆる課程博士）によるものであることを示す。

目　　　次

氏　名（本籍）	**ビラール　イリヤス**（中華人民共和国）
博士の専攻分野の名称	博士（数学）
報告番号	甲 第 7 号（学位記番号　甲理第5号）
学位授与年月日	平成7年3月20日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
論文題目	拡散をともなう伝染病モデルの進行波解について
審査委員	主査　教授　細野雄三
	副査　教授　辻　幹雄
	〃　教授　藤井　宏

論文内容の要旨

申請論文は，伝染病学に現われる数理モデルの一つである，感染者と非感染者の2つの個体群に分類された集団の中で発生した伝染病の空間的な伝播を記述する反応拡散方程式系の解析を主題としている。

まず，本論文で扱われている基礎方程式（以下，『モデル方程式』と呼ぶ）を述べる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uv - ru ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - uv ,$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x), \quad v(x,\ 0) = v_0(x) \equiv 1.$$

上式に現われる2次の非線形相互作用は，Kermack-McKendricモデルと呼ばれ，1927年KermackとMcKendricによって，ボンベイ島におけるペストの流行の解析に用いられその有効性が示されたモデルである。その後，Noble（1974）が伝染病の空間的伝播のモデルとして，感染者と非感染者が拡散係数，d_1，d_2のランダムウォークにより共に空間的に分散する項を加えた上記のモデル方程式を提案し，$d_1 = d_2$の場合の数値シミュレー

ションを通じて中世ヨーロッパにおけるペストの伝播を解析した。本論文の目的は，このモデル方程式を通して伝染病が伝わるための条件，伝染病が伝わるときの伝播速度，その速度を決める要因を考察し，空間を一定の速度で伝わる解－進行波解（伝染病が一定の速度で伝わる現象に対応）の存在と，進行波解の速度のパラメータ依存性を明らかにすることである。

申請論文はまた，非線形反応拡散方程式系における進行波の研究と見なせるが，ここで扱われている系は，その平衡点が1次元多様体となり，系が退化している点に特徴を持つ。2成分反応拡散方程式系に対する進行波解を求める問題は，4次元力学系の，2つの平衡点を結ぶ軌道を求めることと同じである。$d_2 = 0$ の場合には，A. Källēn が，1984年に進行波解の存在を証明した。この場合には，元の系は3次元力学系となるが，さらに第一積分を持つことを用いて，系を2次元力学系に帰着することにより証明が可能となる。また，1989年には，化学反応論の分野において Needham と Merkin は線形減衰項がない場合，積分不変量を用いて元の系を3次元力学系に帰着することにより，進行波解の存在を証明している。しかしながら，申請論文の主要部分を占める，d_1，d_2 が共に正の場合の進行波解の存在証明には，このような方法は適用できず，4次元力学系そのものを考察しなければならないという点で，数学的な困難性を持っている。

申請者は，まず第1章において，$d_1 = 0$ の場合について，S. Dunbar が開発した Wazewski 集合に基づくシューティング法を適用して，任意の正の速度を持つ進行波解の存在を示している。$d_2 = 0$ のときには，先に述べたよう Källēn によって，$r = \alpha/\beta \geqq 1$ ならば，進行波解は存在しないこと，また $r < 1$ ならば，ある最小速度 $c^* > 0$ が存在して任意の $c \geqq c^*$ に対して進行波解が存在することが証明されている。ここでは，これとは逆に $d_1 = 0$ のとき，すなわち感染者の空間的な拡散効果が十分小さいときの極限状態の場合の進行波解の存在を議論している。つまり，この章では感染者がほとんど動かず，非感染者だけが動いたとき，病気がある一定の形態で伝わって行くことが有り得るのかどうかを方程式を通して考察している。

もし感染者の初期分布 $u_0(x)$ の台がコンパクトであるとき，どのような正定数 r に対しても方程式の解は進行波解に発展しない。この事実が $d_2 = 0$ の場合との根本的な違いであり，$d_2 = 0$ の場合と比べると感染者の初期分布が波の形成に重要な役割を果たしていることが分かる。$d_1 = 0$ のとき，申請者の主な結果は次のとおりである。

定理 1.1　$d_1=0$ とおき d_2 を固定する。そのとき，$r<1$ ならば，任意の $c>0$ に対して進行波解が存在する。しかし，$r\geq 1$ あるいは $c\leqq 0$ の時には進行波解は存在しない。

この定理から感染者の初期分布を適当に取ると進行波が生じることが推測できる。このことは数値実験によって確認している（第3章参照)。

第2章の内容は，$d_1>0$，$d_2>0$ のときの，進行波解の存在の証明である。具体的には次の定理 2.1を証明した。

定理 2.1　任意の $d=d_1/d_2>0$ および，$c\geq 2\sqrt{1-r}$ をみたす c に対して，方程式の進行波解（$f(z)$，$g(z)$)（$z=x-ct$）が存在する。さらに，z に関して，$f(z)$ はピークを一つもつ，すなわち，ある z^* があって，$f(z)$ は $z<z^*$ に対して単調増大，$z>z^*$ に対して単調減少である。また $g(z)$ は z に対して単調増大である。

第1章の方法は，この場合に適用することはほとんど不可能であり，申請者は不変多様体の理論に基づいて高度なシューティング法を開発した。この点が本論文の理論的取り扱いの中で中心的な部分である。

第3章では，適当な変数係数の $\beta(x)$ と $\alpha(x)$ を持つとき，病気の伝播を阻止することができるかどうか，できない場合には少なくとも，病気の伝播速度を落とすことができるかどうかについて数理的，数値的な考察を行っている。

まず，正の有界連続関数 $\beta(x)$ と $\alpha(x)$ と，コンパクトな台をもつ $u_0(x)$ について，次の定理が得られている。

定理 3.1　全ての $x\in R$ に対して $r(x)=\alpha(x)/\beta(x)\geqq 1$ とする。このとき，$t\to+\infty$ ならば，$u(x,t)\to 0$ である。

この定理は，$r(x)\geqq 1$ であれば，局所的に入ってくる感染者が時間の経過と共に消え去ることを示している。

定理 3.2　$u(x,0)$ をコンパクトサポートとすると任意の $\delta>0$ に対して N が存在して全ての $t>0$ と $x>N$ に対して

$$u\,(x+c_0t-(\ln t)/c_0,\,t)\leqq\delta$$

となる。

この定理は，感染者の初期分布の台（support）の右端から十分離れたところから出発し，速度 $c(t)=c_0-(c_0t)^{-1}$ より速い速度で右に移動するものには，病気は決して感染しないことを述べている。

最後に申請者は，係数が空間変数に依存する種々の場合を設定して，数値的方法による考察を行い，解の定性的挙動について興味深い示唆を得ている。たとえば，係数が空間的周期関数のとき，解の漸近挙動における閾値現象が生じることを示している。

論文調査結果の要旨

申請者は，伝染病学の分野において重要なモデルであるKermackとMcKendricのモデルを基礎におきつつ，それを拡張したモデルを厳密に数学的な方法論を用いて解析を行い，数学的立場からのみではなく，数理伝染病学（Mathematical Epidemiology）の見地からも重要な貢献をしたものと認められる。まず，数理伝染病学の見地から申請者の得た結果は，過去のKällēnらの仕事の限界を越えて，しかも厳密な数学的考察の結果として，進行波解の伝播速度のパラメータ依存性を完全に明らかにし，伝播速度は感染者の拡散係数と除去率にしか依存せず，非感染者の拡散係数には依存しないという非常に興味深い示唆に富んだ結果を与えている。また，さらに数値的考察によって，伝染病の伝播の阻止の要因に関する考察を加えている。

数学的見地からは，申請者は，まず，$d_1 = 0$ の場合の進行波解の存在証明を通して一般的なDunbarらによるシューティング法が3次元までの力学系に対して有効であることを示した。ここで興味ある結果は，この場合最小速度を持つ進行波解が存在しないという例を初めて与えたことである。続いて，Dunbarらによるシューティング法が適用不可能な拡散係数が共に正の場合に，不変多様体の理論に基づいた新しい高度なシューティング法を開発して，これまで未解決であった進行波解の存在を証明したことは，反応拡散方程式の研究に大きく寄与するものといえる。

このように，申請論文は，拡散を伴うKermack－McKendricモデルに対する進行波解の存在および非存在の問題を完全に解決し，そのモデルの数理伝染病学における意義を明らかにした。

また，申請者は，平成7年1月11日（水）に開催された公聴会において，よく準備した発表を行い，質疑に対する応答も適切であった。

以上の調査結果を総合し，本調査委員会は，申請論文を博士学位論文として充分価値あるものと判定する。